2005 年度非平衡物理学 授業ノート 2

2006.10.11 担当 吉森 明

お知らせ: 授業のホームページをつくりました。

http://www.cmt.phys.kyushu-u.ac.jp/~A.Yoshimori/hiheik06.html

連絡を載せたり、授業で配るプリントを pdf でおいておきますので、ご覧ください。

§2. ブラウン運動の基礎

2-1. ランジュバン方程式

目標 ランジュバン方程式の形を覚え、ブラウン運動以外にも不規則な時間変化に応用できることを理解する。具体的には以下のことを分かる。

- 不規則な運動の特徴。
- ランダム力についての仮定 (下記 **「仮定」** 参照)。
- ランジュバン方程式の形。
- ランジュバン方程式は微粒子だけでなく、いろいろな不規則な現象に使える。

目次 (1) 不規則な運動

(2) ブラウン運動のモデル

(3) ランジュバン方程式

(4) 具体例

(5) まとめ

仮定 次の式をランジュバン方程式と呼ぶ。

$$\text{線形}: \quad \dot{X}(t) = -\gamma X(t) + R(t) \tag{1}$$

$$\text{非線形}: \quad \dot{X}(t) = F(X(t)) + R(t) \tag{2}$$

ただし、

$$\langle R(t) \rangle = 0 \tag{3}$$

$$\langle R(t)R(t') \rangle = D\delta(t - t') \tag{4}$$

を満たす。さらに

$$\text{線形}: \quad \langle X(0)R(t) \rangle = 0 \qquad t \geq 0 \tag{5}$$

$$\text{非線形}: \quad \langle f(X(0))R(t) \rangle = 0 \qquad t \geq 0 \tag{6}$$

ここで、 $f(X)$ は X の任意関数

結論　ランジュバン方程式は、不規則な運動を再現する**モデルとして有効**。

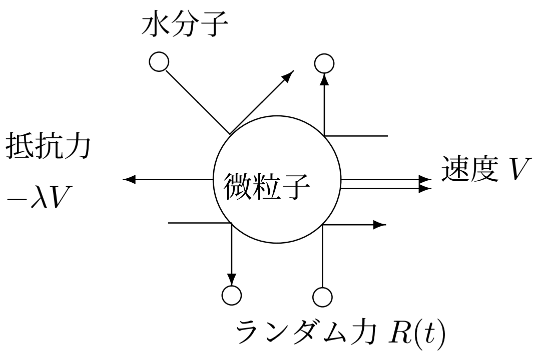
問題　(2-1 が終わった段階で解けるようになる問題。宿題ではない。) コンデンサーと抵抗をつないだ回路で、電源が無いのに、熱雑音で電流が流れる現象がある。コンデンサーにたまる電荷の時間変化を表す式を「ランダム力」を使って書きなさい。

(1) 微粒子の運動

www にあるブラウン運動のページ*1「4. ブラウン運動のシミュレーション」で、粘性抵抗と温度を選んで開始ボタンを押すと粒子が動き出す。軌跡も書ける。

(2) ブラウン運動のモデル

○ 1908 年、ランジュンバンは、ブラウン運動を表す数式をつくった。



微粒子は、水分子から力を受ける。

1. 止まっていても受ける力 (**ランダム力**): $R(t)$
2. 動きを止めようとする力 (抵抗力): $-\lambda V(t)$

運動方程式は、

$$m\dot{V}(t) = -\lambda V(t) + R(t) \tag{7}$$

○ ランダム力 $R(t)$ の分布=測る度に別の $R(t)$ が得られる。

$$\{R_i(t)\} = \{R_1(t), R_2(t), R_3(t), \dots\} \qquad : R(t) \text{ の集合} \tag{8}$$

全ての要素 $R_1(t), R_2(t), R_3(t), \dots$ は、**時刻が同じ**で、測定の番号だけが違うことに注意。

$$\boxed{\text{時刻が同じでもたくさんの } R(t)} \longrightarrow R(t) \text{ が分布}$$

この分布から平均を定義する。例えば

$$\langle R(t) \rangle = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} R_i(t) \tag{9}$$

n は測定回数。

*1 http://www.geocities.co.jp/Hollywood/5174/indexb.html。

相関関数は、

$$\langle R(t)R(t')\rangle = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R_i(t)R_i(t') \tag{10}$$

これらの平均は**時間平均では無い**事に注意しなさい。

宿題:

2 (10 点) 講義では不規則な運動として、次の 2 点の性質を挙げた。

(a) 軌道がガタガタしている。(いたるところ微分不能)

(b) 同じ初期条件から始めても違う運動。つまり予測できない。

今、2 次元上の粒子の運動を考える。軌道がガタガタしていても、毎回まったく同じ軌道を描き、ただし、速度が毎回違う運動は、上の 2 つの性質を満たす。しかし、この運動は規則的な感じがしてしまう*2。この不都合を解消するよう、不規則な運動の妥当な定義を考えなさい。

3 (15 点) (1) 式と (3)-(5) 式で計算される $X(t)$ が不規則な時間変化をすることを数値的に確かめよ。ただし、時刻 t を $t_i(i=1,\ldots,n)$ のように離散化し、(1) 式を

$$X(t_{i+1}) - X(t_i) = -\gamma X(t_i)\Delta t + W(t_i) \tag{11}$$

のように差分化しなさい。$W(t_i)$ は、それぞれの時間で独立なガウス分布 (平均 0、分散 $D\Delta t$) になるように乱数を引いて値を決めよ。適当な初期条件 $X(t_1)$ を与えて、実際に計算機で計算して、横軸 t、縦軸 $X(t)$ のグラフを書け。γ や D も適当に与えて良い。ただし、γ の大きさを変え、グラフの形がどう変るか調べよ。

4 (10 点) 微粒子の 3 次元ブラウン運動が次のランジュバン方程式で表されるとする。

$$m\dot{\mathbf{V}}(t) = -\lambda\mathbf{V}(t) + \mathbf{R}(t) \tag{12}$$

ただし、$\mathbf{V}(t)$ は微粒子の 3 次元速度ベクトル、m は質量で、$\mathbf{R}(t)$ は R_x、R_y、R_z を成分に持つ 3 次元ベクトルのランダム力で、

$$\langle R_\alpha(t)\rangle = 0 \qquad \alpha = x, y, z \tag{13}$$

$$\langle R_\alpha(t)R_\beta(t')\rangle = D\delta(t-t')\delta_{\alpha\beta} \qquad \beta = x, y, z \tag{14}$$

$$\langle V_\alpha(0)R_\beta(t)\rangle = 0 \tag{15}$$

---

*2 これは、2003 年度の受講生永末勇治さんの指摘です。

を満たす。$V_\alpha(t)$ は、速度ベクトルの α 成分を表す。$t = 0$ で、$\mathbf{V}(0) = \mathbf{V}_0$、$\mathbf{r}(0) = 0$ が分かっている場合に、$\mathbf{V}(t)$ と $\mathbf{r}(t)$ の平均 ($\langle \mathbf{V}(t) \rangle$、$\langle \mathbf{r}(t) \rangle$) と分散 ($\langle |\mathbf{V}(t)|^2 \rangle - |\langle \mathbf{V}(t) \rangle|^2$、$\langle |\mathbf{r}(t)|^2 \rangle - |\langle \mathbf{r}(t) \rangle|^2$) を求めなさい。ただし、$\mathbf{r}(t)$ は、微粒子の位置を表し、$\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{V}(t)$ とする。