2006 年度非平衡物理学 授業ノート 8

2006.11.29 担当 吉森 明

§3-3. 時間遅れの応答

目標 時間遅れの線形応答の式を覚える。線形応答の範囲で一般的な式であることを理解する。

- 線形応答は、応答が外場に比例する現象で、広く見られる。
- 応答は、過去の外場が影響することがある。その時の式の形。
- 線形応答は、線形ランジュバン方程式から計算できる。
- $\alpha(t)$ は、外場によらない。

目次 (1) はじめに

(2) 時間遅れ

(3) 線形ランジュバン方程式による例

(4) まとめと補足

仮定

1. **外場が充分弱い。**
2. $f(t) = 0$ の時、定常。
3. 未来の時刻の外場は、現在の応答に影響しない。(因果律)

結論 時間おくれの線形応答は一般的に次の式で書ける。

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} \alpha(t - t')f(t')dt' \tag{1}$$

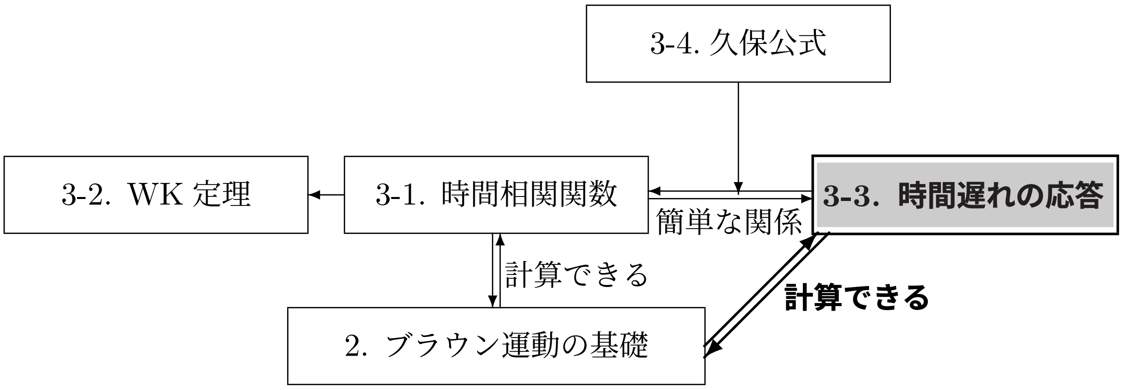
特に $X(t)$ が線形ランジュバン方程式 $\dot{X}(t) = -\gamma X(t) + R(t) + f(t)$ にしたがう場合、$x(t) = \langle X(t) \rangle$ とすると、

$$\alpha(t) = e^{-\gamma t} \tag{2}$$

3-3 で解けるようになる問題 1 次元のコロイド粒子を中心位置が時間変化するレーザーでトラップする。粒子の位置を $X = X(t)$ とすると、レーザーのポテンシャルが $u(X) = k(X - x_0(t))^2/2$ で書ける時、$x(t) = \langle X(t) \rangle$ を求めなさい。ただし、$x_0(t) = A\cos\omega t$ とする。

(1) はじめに

○ 流れ



(3) 線形ランジュバン方程式による例

○ 線形ランジュバン方程式に外場 $f(t)$ を加える。

$$\dot{X}(t) = -\gamma X(t) + R(t) + f(t) \tag{3}$$

$\boxed{x(t) = \langle X(t) \rangle}$ と考える。両辺平均をとると、$\langle R(t) \rangle = 0$、$\langle f(t) \rangle = f(t)$ だから、

$$\langle \dot{X}(t) \rangle = -\gamma \langle X(t) \rangle + f(t) \tag{4}$$

$\langle \dot{X}(t) \rangle = d\langle X(t) \rangle / dt = \dot{x}(t)$ だから、

$$\dot{x}(t) = -\gamma x(t) + f(t) \tag{5}$$

(5) 式は係数変化法で解くことが出来る (**付録**参照)。$t = t_0$ のとき $x = x(t_0)$ とすると、

$$x(t) = e^{-\gamma(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-\gamma(t-t')} f(t') dt' \tag{6}$$

$t_0 \to -\infty$ とすると、$e^{-\gamma(t-t_0)} = e^{-\gamma t + \gamma t_0} \to 0$ だから、右辺第 1 項は 0 になる。2 項目の積分の下限を $-\infty$ にして、

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-\gamma(t-t')} f(t') dt' \tag{7}$$

つまり、$\alpha(t) = \exp[-\gamma t]$

例 1．熱雑音の回路

電圧が時間変化する電源 $E(t)$ を考えると、コンデンサーにかかる電圧は、$Q(t)/C$ だから、

$$\frac{Q(t)}{C} + RI = V(t) + E(t) \tag{8}$$

$I = \dot{Q}(t)$ で、

$$\dot{Q}(t) = -\frac{Q(t)}{RC} + \frac{V(t)}{R} + \frac{E(t)}{R} \tag{9}$$

これは、(3) 式で

$$\gamma = \frac{1}{RC}, \qquad f(t) = \frac{E(t)}{R} \tag{10}$$

とおくのと同じ。したがって、(7) 式から

$$q(t) = \langle Q(t) \rangle = \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{(t-t')}{CR}} \frac{E(t')}{R} dt' \tag{11}$$

となる。

$$q(t) = \int_{-\infty}^{t} \alpha_E(t-t') E(t') dt' \tag{12}$$

と書くと、

$$\alpha_E(t) = \frac{1}{R} \exp[-\frac{t}{CR}] \tag{13}$$

例 2. 問題の答え

ランジュバン方程式は、

$$\dot{X}(t) = -\gamma \frac{du(X(t))}{dX} + R(t) \tag{14}$$
$$= -\gamma k(X - x_0(t)) + R(t) \tag{15}$$

これは、(5) 式で、$\begin{cases} \gamma \to \gamma k \\ f \to \gamma k x_0(t) \end{cases}$ としたものと同じだから、

$$x(t) = \langle X(t) \rangle = \int_{-\infty}^{t} \alpha(t-t') \gamma k x_0(t') dt' \tag{16}$$

で、

$$\alpha(t) = e^{-\gamma k t} \tag{17}$$

$x_0(t) = A\cos\omega t = \Re Ae^{i\omega t}$ ($\Re$ は実部を表す記号) だから、

$$x(t) = \Re\int_{-\infty}^{t} e^{-\gamma k(t-t')}\gamma kAe^{i\omega t'}dt' \tag{18}$$

$$= \Re e^{-\gamma kt}\int_{-\infty}^{t}\gamma kA\exp[\gamma kt' + i\omega t']dt' \tag{19}$$

$$= \Re e^{-\gamma kt}\left[\gamma kA\frac{\exp[\gamma kt' + i\omega t']}{\gamma k + i\omega}\right]_{-\infty}^{t} \tag{20}$$

$$= \Re\gamma kA\frac{e^{i\omega t}}{\gamma k + i\omega} \tag{21}$$

$$= \gamma kA\frac{\gamma k}{\gamma^2k^2+\omega^2}\cos\omega t + \gamma kA\frac{\omega}{\gamma^2k^2+\omega^2}\sin\omega t \tag{22}$$

$\sin\omega t$ に比例する項は、レーザーの動きから位相がずれていることを表している。

付録: (6) 式を (5) 式を解いて導く。

まず、$f(t) = 0$ の方程式 $\dot{x}(t) = -\gamma x(t)$ を考えて、この方程式を解くと、

$$x(t) = Ce^{-\gamma t} \tag{23}$$

C は、時間によらない定数だが、本当に解きたいのは、(5) 式だから、$C = C(t)$ としてみる。$x(t) = C(t)\exp[-\gamma t]$ を (5) 式に代入すると、$\dot{x}(t) = \dot{C}(t)\exp[-\gamma t] - \gamma C(t)\exp[-\gamma t]$ だから、

$$\dot{C}(t)e^{-\gamma t} = f(t) \tag{24}$$

$$\dot{C}(t) = f(t)e^{\gamma t} \tag{25}$$

$$C(t) = \int^{t} f(t')e^{\gamma t'}dt' \tag{26}$$

積分は不定積分で、これから

$$x(t) = e^{-\gamma t}\int^{t} f(t')e^{\gamma t'}dt' \tag{27}$$

(27) 式は、特殊解で一般解は

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} + \int^{t} e^{-\gamma(t-t')}f(t')dt' \tag{28}$$

A は、$t = t_0$ の $x(t)$ の値から決まる定数で、$t = t_0$ のとき $x = x(t_0)$ としたから、(6) 式が求まる。

宿題:

35 (5 点) 時間相関関数が $\varphi(t) = \langle X^2 \rangle e^{-\gamma|t|}$ の時、そのフーリエ変換 $\tilde{\varphi}(\omega)$ が

$$\tilde{\varphi}(\omega) = \frac{2\langle X^2 \rangle \gamma}{\omega^2 + \gamma^2} \tag{29}$$

のローレンツ型になることを示しなさい。また、これを使って熱雑音の回路 (授業ノート 4 P4 参照) で、コンデンサーにたまる電荷の I_ω(授業ノート 7P5(31) 式) を求めなさい。

36 (20 点) 授業で説明した例以外に、線形応答の具体例を挙げなさい。① どういう状況で、② 何の外場をかけると、③ どういう変数が、④ どう応答するか、⑤ 線形応答の式を書いて具体的に説明しなさい。また、応答に時間後れがある場合、その原因を論じなさい。

37 (10 点)(1) 式は、線形応答の場合の一般的な式を表すが、応答 $x(t)$ が外場の 2 乗に比例する非線形応答の一般的な式はどうなるか。時間遅れを考慮して答えなさい。ただし、P1 の仮定は、すべて成り立っているとする。

38 (5 点) 電荷 q を持っている 1 次元のブラウン粒子に電場 $E(t)$ を書けた時、粒子の速度 $V(t)$ に対して線形応答を考え、$\alpha(t)$ を計算しなさい。また $E(t) = E_0 \cos \omega t$ の時、$\langle V(t) \rangle$ と粒子の平均位置 $\langle X(t) \rangle$ を求めなさい。

39 (15 点) 外場が $f(t) = \Re f_0 e^{i\omega t}$ の様に時間変化する時、t が 0 から $2\pi/\omega$ まで経った時の外場が系にした仕事

$$W = -\int_0^{\pi/\omega} x(t)\dot{f}(t)dt \tag{30}$$

を ω、α''_ω と f_0 で表しなさい。ただし、$\Re$ は実部を表し、

$$\langle X(t) \rangle = \int_{-\infty}^{t} \alpha(t-t')f(t')dt' \tag{31}$$

が成り立ち、α''_ω は、$\alpha(t)$ のフーリエ変換の虚部を表す。この仕事は、**パワーロス**と呼ばれる。

40 (20 点) **クラマースクローニッヒの関係式**を調べ、レポートしなさい。