

水素 (H_2) 分子を考える。水素は、スピン $1/2$ のフェルミ粒子で、このスピンの対称状態の分子をオルソ分子、反対称状態の分子をパラ分子とよぶ。また、水素分子は剛体回転子とし、プランク定数を 2π で割ったものを \hbar 、分子の慣性モーメントを I とすると、回転運動のエネルギー準位は、

$$\epsilon_J = \frac{\hbar^2}{2I} J(J+1) \quad (J = 0, 1, 2, \dots) \quad (1)$$

で与えられる。さらに、その縮退度は $2J+1$ と書ける。オルソ分子のパラ分子に対する比 $n = N_{\text{ortho}}/N_{\text{para}}$ が、温度 T を充分低くした極限で

$$n = A \exp\left[-B \frac{\Theta}{T}\right] \quad (2)$$

の形に書けることを示し、 A 、 B を求めなさい。ただし、 k_B をボルツマン定数とすると、

$$\Theta = \frac{\hbar^2}{2Ik_B} \quad (3)$$

で、 A 、 B は文字を含まない実数を表す。

必要なら次の公式を使っても良い。

1. オルソ分子 1 個の回転と核スピンの分配関数を j_1 、パラ分子 1 個の回転と核スピンの分配関数を j_2 とすると、

$$n = \frac{j_1}{j_2} \quad (4)$$

2. 核スピンの大きさを s_A とすると、スピンの対称な波動関数による分配関数 z_S と反対称な波動関数による分配関数 z_A は、

$$z_S = (s_A + 1)(2s_A + 1) \quad (5)$$

$$z_A = s_A(2s_A + 1) \quad (6)$$