

2005 年度 統計力学 II 中間試験問題

2005 年 5 月 30 日 (月) 制限時間 45 分 担当 吉森 明

問題用紙 2 枚、解答用紙 2 枚 (裏を使っても良い)。全ての解答用紙に学籍番号と名前を書くこと。問題番号は、はっきり書きなさい。

すべての問題で、 $\hbar$  は、プランク定数を  $2\pi$  で割ったもの、 $k_B$  は、ボルツマン定数を表す。解答は、式変形の途中も書くこと。

1. スピンの値が  $s_A$  のフェルミ粒子からなる等核 2 原子分子を考える。スピン波動関数には、 $(s_A + 1)(2s_A + 1)$  個の対称状態と  $s_A(2s_A + 1)$  個の反対称状態がある。この 2 原子分子は剛体回転子とし、 $I$  を分子の慣性モーメントとする。

(a)  $r_e$  と  $r_o$  をそれぞれ、

$$r_e = \sum_{J=\text{偶数}} (2J + 1)e^{-J(J+1)\Theta/T} \quad (1)$$

$$r_o = \sum_{J=\text{奇数}} (2J + 1)e^{-J(J+1)\Theta/T} \quad (2)$$

とする時、回転と核スピンの分配関数  $j_{\text{rot-nu}}^{\text{FD}}(T)$  を  $r_e, r_o, s_A$  で表せ。ただし、

$$\Theta = \frac{\hbar^2}{2Ik_B} \quad (3)$$

で、 $T$  は温度を表す。

- (b) 核スピンの対称状態にある分子の個数  $N_{\text{ort}}$  と反対称状態にある分子の個数  $N_{\text{para}}$  の比  $n^{\text{FD}}(T) = N_{\text{ort}}/N_{\text{para}}$  を  $r_e, r_o, s_A$  で表せ。

(c)  $n^{\text{FD}}(T)$  が充分温度を低くした極限で

$$n^{\text{FD}}(T) = A \exp\left[-B \frac{\Theta}{T}\right] \quad (4)$$

の形に書けることを示し、 $A, B$  を  $s_A$  を使って表しなさい。

2. 2次元平面上にある1辺  $L$  の正方形内に閉じ込められている理想フェルミ気体を考える。粒子数を  $N(N \gg 1)$  として、粒子のエネルギー  $\epsilon$  と運動量の絶対値  $p$  は、

$$\epsilon = Ap^a \quad (5)$$

という関係で結ばれている ( $A > 0, a > 0$ )。また、粒子の内部自由度による状態数は  $g$  とする。

- (a)  $L^2 = S$  とすると、状態密度  $D(\epsilon)$  が、 $\epsilon \geq 0$  で

$$D(\epsilon) = fS\epsilon^\alpha \quad (6)$$

の形に書けることを示しなさい。ここでいう状態密度は、粒子の内部自由度による状態数  $g$  が含まれている。 $f$  と  $\alpha$  を  $\hbar, A, a, g$  で表しなさい。ただし、2次元平面内の正方形に閉じ込められている自由粒子は、量子数  $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$  と波数  $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$  が

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L} \mathbf{n} \quad (7)$$

で結ばれることを使いなさい。

- (b) フェルミエネルギー  $\epsilon_F$  を  $f, \alpha, N, S$  で表せ。  
(c) 絶対零度における系の全エネルギー  $E$  を  $\epsilon_F, S, f, \alpha$  を使って表せ。