2003.5.29 担当 吉森 明

§5. 線形応答

§5-1. 時間遅れの式、物理的な意味

目標 線形応答の一般的な式と物理を理解する。ランジュバン方程式との関係を理解する。具体的には以下のことを分かる。

- 線形応答とは外場が充分弱いときに、応答が外場に比例する現象で、時間遅れがあると結論になる。
- 線形ランジュバン方程式から計算できる。
- 線形応答はいろいろな現象にみられる。

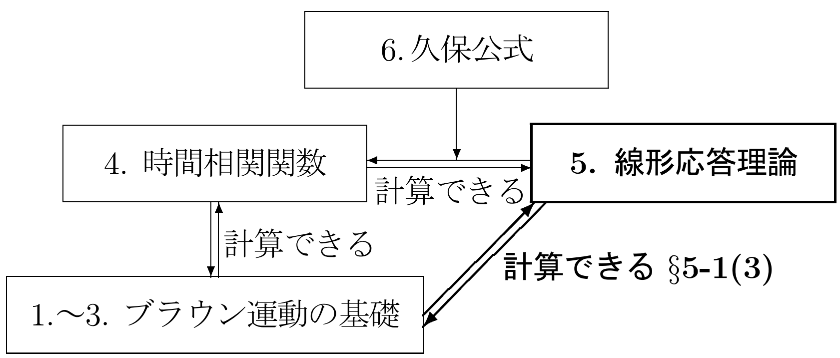
目次 (1) はじめに
(2) 時間遅れ
(3) 線形ランジュバン方程式による例

仮定
1. **外場が充分弱い。**
2. 未来の時刻の外場は、現在の応答に影響しない。(因果律)

結論 時間おくれの線形応答は一般的に次の式で書ける。

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} \alpha(t-t')f(t')dt' \tag{1}$$

(1) はじめに



(3) 線形ランジュバン方程式による例

○ 線形ランジュバン方程式に外場 $f(t)$ を加える。

$$\dot{X}(t) = -\gamma X(t) + R(t) + f(t) \tag{2}$$

$\boxed{x(t) = \langle X(t)\rangle}$ と考える。両辺平均をとると、$\langle R(t)\rangle = 0$ だから、

$$\langle \dot{X}(t)\rangle = -\gamma\langle X(t)\rangle + f(t) \tag{3}$$

$\langle \dot{X}(t)\rangle = d\langle X(t)\rangle/dt = \dot{x}(t)$ だから、

$$\dot{x}(t) = -\gamma x(t) + f(t) \tag{4}$$

(4) 式は係数変化法で解くことが出来て、(宿題25)

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\gamma(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-\gamma(t-t')}f(t')dt' \tag{5}$$

t_0は外場をかけ始める時刻。

$x(t_0) = 0$ を仮定して、$t_0 \to -\infty$ とする。

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-\gamma(t-t')}f(t')dt' \tag{6}$$

つまり、$\alpha(t) = \exp[-\gamma t]$

宿題の訂正: 問題9を授業ノート4で訂正しましたが、まだ間違えっていました[1]。お詫び致します。

それから、問題11も誤植があります[1]。すみません。

9(20点) 誤 (36) 式

$$\frac{\partial P(\mathbf{s},t)}{\partial t} = \left\{ -\frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} \cdot [\gamma \mathbf{s} \times \mathbf{H}] + \frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} \cdot \mathbf{\Gamma}(\mathbf{s} - \mathbf{S}_0) + \frac{\partial}{\partial s}[\mathbf{\Gamma}(\mathbf{s} - \mathbf{S}_0)]_r + \frac{\partial^2}{\partial s^2}\frac{D}{2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{s}^2}\frac{D}{2} \right\} P(\mathbf{s},t) \tag{7}$$

正

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(\mathbf{s},t)}{\partial t} = & \left\{ -\frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} \cdot [\gamma \mathbf{s} \times \mathbf{H}] + \frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} \cdot \mathbf{\Gamma}(\mathbf{s} - \mathbf{S}_0) + \frac{\partial}{\partial s}[\mathbf{\Gamma}(\mathbf{s} - \mathbf{S}_0)]_r \right. \\ & \left. + \frac{1}{s^2}\frac{\partial}{\partial s}s^2\frac{\partial}{\partial s}\frac{D}{2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{s}^2}\frac{D}{2} \right\} P(\mathbf{s},t) \end{aligned} \tag{8}$$

11(20点) 誤 を問題7の結果を使って、証明せよ。

正 を問題10の結果を使って、証明せよ。

宿題:

24(10点) 時間相関関数が$\psi(t) = \langle X^2 \rangle e^{-\gamma t}$ の時、そのフーリエ変換$\tilde{\psi}(\omega)$ が

$$\tilde{\psi}(\omega) = \frac{\langle X^2 \rangle \gamma}{\omega^2 + \gamma^2} \tag{9}$$

のローレンツ型になることを示しなさい。

25(10点) (5) 式を導きなさい。

26(20点) 熱雑音の回路で電源電圧が交流の時、つまり、$E(t) = E_\omega e^{-i\omega t}$の時、$\langle Q(t) \rangle$ の具体的な式を計算しなさい。

[1] これらの間違いは、凝縮系科学専攻の大久保毅さんが指摘してくれました。有り難う御座いました。