

## 問題 1.(重要)

宿題 1. (4 月 11 日出題、18 日提出) 古典単原子理想気体

$$H = \sum_i^N \frac{|\mathbf{p}_i|^2}{2m} \quad (1)$$

について、温度  $T$ 、体積  $V$  のカノニカル分布の分配関数を求めなさい。ただし、 $N$  は粒子数、 $m$  は質量、 $|\vec{p}_i|$  は  $i$  番目の粒子の運動量です。また、 $T$ 、 $V$ 、化学ポテンシャル  $\mu$  のグランドカノニカル分布の大分配関数を求めなさい。

宿題 2. (4 月 18 日出題、4 月 25 日提出) 1 粒子のエネルギー固有状態が 3 個ある 3 準位系を考える。それぞれの状態のエネルギー固有値は、 $0, \epsilon, 2\epsilon$  で、粒子はたがいに相互作用していない理想気体とする。

(a) 温度  $T$  の熱溜に接しているとし、粒子がフェルミ統計、ボーズ統計に従う場合のカノニカル分布における分配関数をそれぞれ求めなさい。ただし、粒子数は  $N = 3$  する。

(b) さらに、化学ポテンシャルを  $\mu$  の粒子溜めに接するとして、グランドカノニカル分布の大分配関数を求めなさい。ただし、 $\mu < 0$  とする。

宿題 3. (4 月 25 日出題、5 月 2 日提出) 相対論効果が大きい時、

$$\epsilon_{\vec{l}} = c\hbar|\vec{k}(\vec{l})|^{*1} \quad (2)$$

となる。 $c$  が光速の時、 $D(\epsilon)$  を求めよ。ただし、 $\vec{k}(\vec{l})$  は以下とする。

$$\vec{k}(\vec{l}) = \frac{2\pi}{L}\vec{l} \quad (3)$$

$$\vec{l} = (l_x, l_y, l_z) \quad (4)$$

$l_x = 0, 1, \pm 1, \dots$  である。 $l_y, l_z$  も同じとする。

宿題 4. (5 月 2 日出題、5 月 9 日提出) 状態密度が  $D(\epsilon) = D_0 V \epsilon^2$  の時、 $T = 0$  のエネルギーと圧力を  $N$  と  $V$  と  $D_0$  で表せ。

宿題 5. (5 月 9 日出題、5 月 16 日提出) 前週と同じ状態密度  $D(\epsilon) = V D_0 \epsilon^2$  で、任意の温度での  $E$  と  $PV$  の関係を求めなさい。

\*1 訂正: 板書は  $c|\vec{k}|$  になっていましたが、 $\hbar$  を加えて下さい。すみません。

宿題 6. (5月16日日出題、5月23日提出)

$$S = - \left( \frac{\partial J}{\partial T} \right)_{V, \mu} \quad (5)$$

を使って、理想フェルミ気体のエントロピーを温度  $T$  で展開し、 $T$  の 1 乗の項\*2まで求めよ。 $J$  は (9.19) 式から、 $D(\epsilon)$  は (9.10) 式。p. 141 の展開式を使え。

宿題 7. (5月23日日出題、5月30日提出)  $D(\epsilon)$  を (10.8) 式を使って、BEC の転移温度を求めなさい。

宿題 8. (5月30日日出題、6月6日提出) 状態密度  $D(\epsilon) = D_0 V \epsilon^2$  ( $\epsilon \geq 0$ ),  $D(\epsilon) = 0$  ( $\epsilon < 0$ ) の時、転移温度以下の圧力を求めなさい。

宿題 9. (6月6日出題、6月13日提出) 授業で導いた光子の  $D(\omega)$  を使って、体積  $V$  の箱に閉じ込めた光子の全エネルギーを計算しなさい。ただし、教科書の  $D(\omega)$  は単位体積あたりになっていることに注意せよ。教科書 P158 の欄外注を使っても良い。

宿題 10. (6月13日出題、6月20日提出) 異核 2 原子分子 1 個の分配関数が  $Z_1 = Z_G j_{rot}(T) Z_S$  と書ける時、1 分子あたりの比熱が  $C_V = C_{V,G} + C_{V,rot} + C_{V,S}$  となることを示し、(8.12) 式を導きなさい。ただし、 $G, rot, S$  は重心、回転、スピンを表す。また、 $x \ll 1$  で  $\ln(1+x) \simeq x$  を使え。

宿題 11. (6月20日出題、6月27日提出) 原子がボース粒子の時、 $j_{rot-nu} = z_S r_e + z_A r_o$  となることを示し、教科書 P.125 (8.10) ~ (8.12) と同様に低温での比熱とオルソ分子とパラ分子の比を求めよ。ただし、 $z_S, z_A, r_o, r_e$  は授業と同じで、核スピンを  $s_A$  とする。

宿題 12. (6月27日出題、7月4日提出) (1) P185 演習問題 [4]  
(2)  $f(M) = A_0 + A_2 M^2 + A_4 M^4$  で  $A_2 > 0$  と  $A_2 < 0$  の場合に  $f(M)$  を最小とする  $M_0$  と  $f(M_0)$  をすべて求めよ。ただし、 $A_4 > 0$ 。(予習)

宿題 13. (7月4日出題) 教科書 P173 の (11.28) の様な (ランダウ) 自由エネルギーを考えたとき、温度  $T_c$  での  $M$  のとびを求めなさい。また、 $T > T_c$  と  $T < T_c$  での比熱を計算しなさい。



---

\*2 訂正: 授業に出した問題では  $T^2$  となっていました、間違いです。すみません。 $T^2$  の項は 0 なので、 $T^2$  まででも答えは変わりませんが、 $J$  で  $T^3$  まで展開しないといけないので、P141 の公式では足りなくなります。したがって、訂正して下さい。

## 問題 2.(余裕があれば解くこと)

- 宿題 1. (4月11日出題、18日提出) 理想気体と考えられるものを授業で挙げたもの以外に挙げ、理由も答えなさい。
- 宿題 2. (4月18日出題、4月25日提出) 粒子に区別がある古典力学に対応する統計に(マクスウェル-)ボルツマン統計がある。これは、粒子に番号をつけて微視的状态を数え、最後に粒子数  $N$  の  $N!$  で割る。宿題??の3準位系で、カノニカル分布の分配関数 ( $N = 3$ ) と、グランドカノニカル分布の大分配関数を求めなさい。また、粒子を区別するのにも関わらず、なぜ  $N!$  で割るのか、説明しなさい。
- 宿題 3. (4月25日出題、5月2日提出) 教科書演習問題 P.144 [5] (3)
- 宿題 4. (5月2日日出題、5月9日提出) 教科書 演習問題 P.142 [1]
- 宿題 5. (5月9日日出題、5月16日提出) 教科書 演習問題 P.144 [5] (1) (2) (4) (5)
- 宿題 6. (5月16日日出題、5月23日提出) プリント「授業ノート1」 p. 8 (20) 式で、無限等比級数の収束条件からボース粒子の化学ポテンシャルが負になることを導け。ただし、最低エネルギー準位は0とする。
- 宿題 7. (5月23日日出題、5月30日提出) 2次元平面に閉じ込められたボース粒子の BEC はどうなるか。
- 宿題 8. (5月30日日出題、6月6日提出) BEC が起きても圧力に  $\epsilon = 0$  の項が寄与しないことを次の方法(授業とは別の方法)で示せ。(10.17) 式だけを使い、エントロピーからヘルムホルツの自由エネルギーを計算して圧力を求めよ。 $PV = \frac{2}{3}E$  を使ってはいけない。
- 宿題 9. (6月6日出題、6月13日提出) 光子の数は人間には制御出来ないが、熱力学の原理によって決まると、授業中に説明した。具体的に理想ボース気体の統計力学を使って(平均の)粒子数を求めなさい。ただし、 $\omega > 0$  の光子の粒子数とする。<sup>\*3</sup>
- 宿題 10. (6月13日出題、6月20日提出) 温度が低い時、(8.5) 式で大きい  $J$  の項は無視できることを示せ。
- 宿題 11. (6月20日出題、6月27日提出) 教科書演習問題 p131[1]
- 宿題 12. (6月27日出題、7月4日提出) P.185 演習問題 [3]
- 宿題 13. (7月4日出題) P.186 演習問題 [5]

---

<sup>\*3</sup> 訂正: プリントの問題文はこの但し書きが抜けていました。申し訳ありません。訂正して下さい。 $\omega = 0$  のものは BEC と同じ事情で熱力学を使っても決められません。