

2008 年度統計力学 II 宿題 4 (5 月 14 日出題、5 月 21 日提出) 解答

担当 吉森 明

[問題 1.] 状態密度が $D(\epsilon) = D_0 V \epsilon^n (n > -1)$ の時 $T = 0$ での E と P を D_0, V, n と N で表せ。 V は体積、 D_0 は定数、 $\epsilon < 0$ で $D(\epsilon) = 0$ とし、内部自由度は考えなくてよい。

[解答] 絶対零度ではフェルミの分布関数 $f(\epsilon)$ は、階段関数 (教科書 (9.11) 式) になる。これを教科書 (9.6) 式に代入すると、

$$N = \int_0^{\epsilon_F} D(\epsilon) d\epsilon = \int_0^{\epsilon_F} D_0 V \epsilon^n d\epsilon \quad (1)$$

$$= D_0 V \left[\frac{\epsilon^{n+1}}{n+1} \right]_0^{\epsilon_F} \quad (2)$$

$$= D_0 V \frac{\epsilon_F^{n+1}}{n+1} \quad (3)$$

ϵ_F について解くと

$$\epsilon_F = \left(\frac{(n+1)N}{D_0 V} \right)^{1/(n+1)} \quad (4)$$

E についても同様に教科書 (9.7) 式から

$$E = \int_0^{\epsilon_F} \epsilon D(\epsilon) d\epsilon = \int_0^{\epsilon_F} D_0 V \epsilon^{n+1} d\epsilon \quad (5)$$

$$= D_0 V \left[\frac{\epsilon^{n+2}}{n+2} \right]_0^{\epsilon_F} \quad (6)$$

$$= D_0 V \frac{\epsilon_F^{n+2}}{n+2} \quad (7)$$

(3) 式を使って、

$$= \frac{n+1}{n+2} N \epsilon_F \quad (8)$$

(4) 式を代入、

$$= \frac{n+1}{n+2} N \left(\frac{(n+1)N}{D_0 V} \right)^{1/(n+1)} \quad (9)$$

これで E を N と V と D_0 で表せた。

圧力は、教科書 P7(1.15) 式

$$P = - \left(\frac{\partial E}{\partial V} \right)_{S,N} \quad (10)$$

ここで、 S はエントロピーを表す。この式は、 S と N を一定にして微分する事を表しているが、今 $T = 0$ だから $S = 0$ となり (熱力学第 3 法則教科書 P7)、 S 一定については気にしなくても良い。

$$P = - \frac{\partial}{\partial V} \left\{ \frac{n+1}{n+2} N \left(\frac{(n+1)N}{D_0 V} \right)^{1/(n+1)} \right\} \quad (11)$$

$$= \frac{1}{n+2} \frac{N}{V} \left(\frac{(n+1)N}{D_0 V} \right)^{1/(n+1)} \quad (12)$$

[問題 2.] 教科書 P143 演習問題 [1]

[解答] 略。教科書 P219 の演習問題解答を見て下さい。