

2010 年度 統計力学 II 宿題 3 (5 月 6 日出題、13 日提出) 解答

吉森 明

[問題 1.] 1 粒子のエネルギー固有値が $\epsilon_l = \hbar\omega l (l = 0, 1, 2, \dots)$ で与えられるとき $D(\epsilon)$ を求めなさい。 $\epsilon \gg \hbar\omega$ として準位は密に詰まっている。

[解答] $D(\epsilon)$ の定義は、単位 ϵ あたりの準位の数なので、

$$D(\epsilon) = \frac{\epsilon \text{ から } \epsilon + \Delta\epsilon \text{ までの準位の数}}{\Delta\epsilon} \quad (1)$$

今の場合、準位の間隔は等間隔なので、「 ϵ から $\epsilon + \Delta\epsilon$ までの準位の数」は、「 $\Delta\epsilon/\text{準位の間隔}$ 」でだいたい与えられる。ただし、 ϵ と $\epsilon + \Delta\epsilon$ にちょうど準位があるかないかで少し違いができるが、 ϵ が充分大きければ、無視できる。「準位の間隔」は $\hbar\omega$ なので、

$$\epsilon \text{ から } \epsilon + \Delta\epsilon \text{ までの準位の数} = \frac{\Delta\epsilon}{\hbar\omega} \quad (2)$$

したがって、

$$D(\epsilon) = \frac{1}{\hbar\omega} \quad (3)$$

[問題 2.] $\phi(0, y, z) = \phi(L, y, z) = \phi(x, 0, z) = \phi(x, L, z) = \phi(x, y, 0) = \phi(x, y, L) = 0$ の境界条件のときにエネルギー固有値を求めよ。

[略解](詳しくは「岩波基礎物理学シリーズ 7 「統計力学」、長岡洋介 著、岩波書店」P32-34 参照のこと) 変数分離法で解けば、簡単に求められる。答えだけ書くと、エネルギー固有値を $\epsilon_{\mathbf{l}}$ とすると、

$$\epsilon_{\mathbf{l}} = \frac{\hbar^2}{2m} |\mathbf{k}(\mathbf{l})|^2 \quad (4)$$

ここで、

$$\mathbf{k}(\mathbf{l}) = \frac{\pi}{L} \mathbf{l}, \quad \mathbf{l} = (l_x, l_y, l_z), \quad (5)$$

$l_x = 1, 2, \dots, l_y = 1, 2, \dots, l_z = 1, 2, \dots$ を表す。