

2011 年度 統計力学 II 問題

制限時間 90 分 担当 吉森 明

問題用紙 4 枚、解答用紙 2 枚 (裏を使っても良い)。解答用紙が足りないときは、申し出れば 3 枚以上使える。3 枚以上使った場合は、解答用紙の 1 枚目に何枚使ったかを書くこと。全ての解答用紙に学籍番号と名前を書きなさい。解答は、式変形の途中も書くこと。

注意: 小テストの得点は、約 1.2 倍して加点する。ただし、第 1 回小テストは大問の 1.、第 2 回小テストは大問の 2.、第 3 回小テストは大問の 3. の配点以上には加点しない。したがって、うまくいかなかった小テストに対応する問題を中心に解く方が得点は増えます。

すべての問題で、 \hbar はプランク定数を 2π で割ったもの (解答にはプランク定数ではなく \hbar を使いなさい)、 k_B は、ボルツマン定数を表し、 T は温度、 $\beta \equiv 1/(k_B T)$ とする。また、 V は体積、 N は粒子数で、特に指定がなければ、解答にこれらの記号を自由に使って良い。 V も N も充分大きく、 $1/V$ や $1/N$ は無視する。 N/V は無視しない。1 粒子の状態は密に詰まっている。特に断りがなければ平衡状態を考える。

1. 状態密度 $D(\epsilon)$ が内部自由度を含めて

$$D(\epsilon) = \begin{cases} VD_0\epsilon^n & \epsilon \geq 0 \\ 0 & \epsilon < 0 \end{cases} \quad (1)$$

で与えられている理想フェルミ気体を考える。ここで、 D_0 と n は ϵ によらない正の定数 ($D_0 > 0$, $n > 0$) を表す。化学ポテンシャル μ を T で展開し、 $\mu = C_0 + C_1 T + C_2 T^2 + \dots$ としたとき、グランドカノニカル分布を使って、 C_0 、 C_1 、 C_2 を求めなさい。ただし、 C_2 は、 C_0 、 n 、 k_B を使って表せ。

必要があれば、次の公式

$$\int_0^\infty X(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon = \tilde{X}(\mu) + \frac{\pi^2}{6} (k_B T)^2 \left. \frac{dX(\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=\mu} + \dots \quad (2)$$

を使っても良い。ただし、 $X(\epsilon)$ は T を含まない任意関数で

$$\tilde{X}(\epsilon) = \int_0^\epsilon X(\epsilon') d\epsilon' \quad (3)$$

また、 $f(\epsilon)$ はフェルミの分布関数を表す。

2. 状態密度 $D(\epsilon)$ が内部自由度を含めて

$$D(\epsilon) = \begin{cases} VD_0(\epsilon - \epsilon_0)^n & \epsilon \geq \epsilon_0 \\ 0 & \epsilon < \epsilon_0 \end{cases} \quad (4)$$

で与えられている理想ボース気体を考える。ここで、 D_0 と n は問題 1 同様、 ϵ によらない正の定数 ($D_0 > 0$, $n > 0$) で、さらに、 ϵ_0 は ϵ によらない定数で 1 粒子の基底状態 (最低準位) のエネルギーを表す。グランドカノニカル分布を使って次の問いに答えなさい。ただし、解答には

$$\eta(y) \equiv \int_0^\infty \frac{x^y}{e^x - 1} dx \quad (5)$$

で定義される関数 $\eta(y)$ を使ってもよい。ここで、 y は n で表される。

- (a) ボース-アインシュタイン凝縮が起こった時、化学ポテンシャル μ を求めなさい。
- (b) 高温から温度を下げるとちょうど $T = T_c$ でボース-アインシュタイン凝縮が起こった。つまり、 $T > T_c$ は凝縮が起こらなかつたが、 $T \leq T_c$ で凝縮が起きた。 T_c を求めなさい。
- (c) $T < T_c$ のとき $\epsilon > \epsilon_0$ の粒子数 N_e と $\epsilon = \epsilon_0$ の粒子数 N_0 を、全粒子数 N と T 、 T_c 、 n で表せ。
- (d) $\epsilon_0 = 0$ で $T < T_c$ のとき、圧力 P は T^a に比例する。 a を求めなさい。ただし、

$$PV = -k_B T \sum_l \ln(1 - e^{-\beta(\epsilon_l - \mu)}) \quad (6)$$

を使っても良いが、 ϵ_l の記号は最終的な答えに使ってはいけない。

3. スピン s_A のフェルミ粒子からなる等核 2 原子分子を量子論的にカノニカル分布で考える。分子は慣性モーメント I を持った剛体回転子とし、次の問いに答えよ。

- (a) 健介君は、分子 1 個の、回転とスピンの分配関数 j を次ぎのようにして求めたが、誤りがある。誤っている部分を、下線部の番号で答え、なぜ間違っているかを説明し、正しい分配関数を求めなさい。

波動関数の対称性から、2 原子分子の原子を入れ替えると、
全固有関数は符号だけが変わり後は変わらない。① ここで、全固有関数は、
位置に対してだけでなくスピンも考えるので、次の 1 つの可能性がある。②

- i. 位置の固有関数は対称③(粒子の入れ替えに対して符号を変えない)で、スピンについては反対称④(粒子の入れ替えに対して符号を変える)。

位置のエネルギー固有値について、対称のものだけ足し合わせた分配関数を r_e 、反対称だけ足し合わせた分配関数を r_o とする。スピンについても同様に z_S と z_A を定義すると、1つの可能性について位置とスピンは独立なので、 j は積で書ける。つまり、

$$j = r_e z_A \quad (7)$$

- (b) $\Theta = \hbar^2 / (2Ik_B)$ とすると温度 T が $T \ll \Theta$ の時 (低温の極限)、分子 1 個あたりのエネルギーに対する回転とスピンの寄与 E は、

$$E = k_B \Theta A \exp[-B \frac{\Theta}{T}] \quad (8)$$

の形に書ける。 A, B は、 T によらない定数を表す。 A, B を求めなさい。ただし、 A は s_A を使って表しなさい。ここで、異核 2 原子分子の回転の分配関数は、

$$j_{\text{rot}} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \exp[-l(l+1) \frac{\Theta}{T}] \quad (9)$$

で表され、

$$z_S = (s_A + 1)(2s_A + 1) \quad z_A = s_A(2s_A + 1) \quad (10)$$

さらに、エネルギー E は、

$$E = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln j \quad (11)$$

また、 $x \ll 1$ となる x について

$$\ln(1+x) = x + \dots \quad (12)$$

となることを使ってもよい。(解答に x を使ってはいけない。)

4. 次のハミルトニアン

$$H = - \sum_{(i,j)} J \sigma_i \sigma_j \quad (13)$$

で表される格子の上に並んだスピン系がある ($J > 0$)。和 $\sum_{(i,j)}$ は、隣り合う格子の組についてとる。各格子点にあるスピンは、 $\sigma_i = -x, x$ の 2つの状態をとるものとして、カノニカル分布に対する平均場近似を使って、相転移が起こる温度 T_c を次の様に求めなさい。ただし、隣り合う格子の数は z とする。

- (a) まず、1つの粒子に注目し、その粒子の変数を σ_1 とする。 H にある他の粒子の変数 σ_i ($i \neq 1$) を平均値 $\langle \sigma \rangle$ に置き換えたハミルトニアンのうち、 σ_1 と関係する部分を H_A とする。 H_A を求めなさい。
- (b) H_A を使って、1番目の粒子のスピンが σ_1 の状態にある確率 $P_1(\sigma_1)$ を求めよ。
- (c) $\langle \sigma \rangle$ に関する方程式を $\langle \sigma \rangle = f(\langle \sigma \rangle)$ の形で求めなさい。ここで、 $f(\langle \sigma \rangle)$ はある $\langle \sigma \rangle$ の関数を表す。
- (d) 相転移は $f(\langle \sigma \rangle)$ の微分が $\langle \sigma \rangle = 0$ で1になる温度で起こるということを使って、 T_c を求めなさい。