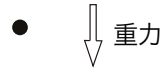


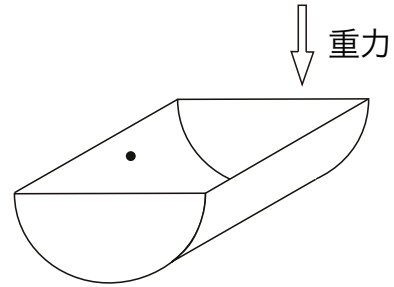
ラグランジアンを求める。オイラー・ラグランジュ方程式

問 1. 以下の系について、適当な座標軸を設定し、ラグランジアンを求め、オイラー・ラグランジュ方程式を書け。
ただし、重力加速度 g がかかっているとする。

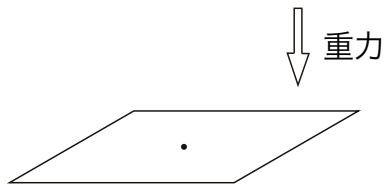
(a) 質点



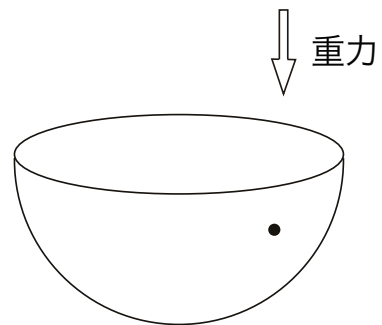
(c) 円柱面上の質点



(b) 平面上の質点



(d) 半球面上の質点



学籍番号		
氏名		

問 2. 以下のことを証明せよ。(ラグランジアンは幾通りも考えられるのだ！)

(a) ラグランジアンを定数倍しても、オイラー・ラグランジュ方程式が変わらない。

(b) 2つのラグランジアン L, L' が

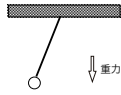
$$L'(\dot{x}, x, t) = L(\dot{x}, x, t) + \frac{d}{dt}F(x, t)$$

と表されるような、任意関数 $F(x, t)$ の時刻 t に関する完全微分で関係づけられるとき、両者のオイラー・ラグランジュ方程式が同じになる。

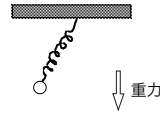
ラグランジアンを求める。オイラー・ラグランジュ方程式

問 3. 以下の系について、適当な座標軸を設定し、ラグランジアンを求めよ。ただし、重力加速度を g 、棒の長さ
とバネの自然長は l 、バネ定数は k 、質点の質量は m （大きい $\circ$ は M ）とする。 ラグランジアンを独立な
変数で表すこと。

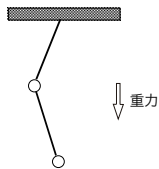
(a) 振り子（2次元面上内運動のみ）



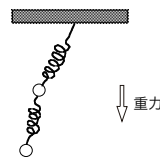
(c) バネ振り子（2次元面上内運動のみ）



(b) 2重振り子（2次元面上内運動のみ）

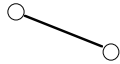


(d) 2重バネ振り子（2次元面上内運動のみ）



学籍番号		
氏名		

(e) 質点と棒 (3次元無重力下)



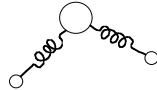
(g) 質点とバネ (3次元無重力下)



(f) 質点と棒 (2次元面内のみ、無重力下)



(h) 質点とバネ (3次元無重力下)



ラグランジアンを求める。オイラー・ラグランジュ方程式を解く

問 4. 鉛直上向きの軸との角を θ に保ちながら一定の角速度 ω で回転するなめらかな棒に、リング状のおもりが通されている。リングを質量 m の質点とみなして、リングの運動を求めよ。重力加速度を g とする。

- (a) 棒の回転中心を原点にして、棒の向きに座標軸 r をとり、リングの位置を表そう。ラグランジアンを求めよ。
- (b) 変数 r について平方完成させて、新しい変数 $s = r - g \cos \theta / \alpha^2$ を用いて表せ。ただし、 $\alpha = \omega \sin \theta$ とする。
- (c) オイラー・ラグランジュ方程式を書き、運動方程式を解け。
- (d) $s = 0$ の位置で速度 $\dot{s} = 0$ のとき、重力と遠心力がつり合って、リングは動かない。これが不安定なつり合い（元の位置に戻らない）になっていることを示せ。

学籍番号		
氏名		

ラグランジュ形式：対角化

問 5. 間隔 a でたてられた 2 本の等しい弾性棒の先端に質点（質量 m ）をそれぞれにつけ、質点間をバネ（バネ定数 k 、自然長 a ）でつなぐ。棒とバネの質量は小さく無視する。弾性棒の先端は、左右のみに動き、変位 x に対して $-k'x$ の復元力が働くとする。この系の運動を調べる。

バネの自然長と棒の間隔が等しいので、2 つの質点の平衡位置はそれぞれの棒がまっすぐの位置である。図のように、質点の平衡位置からの変位をそれぞれ x_1, x_2 とおく。

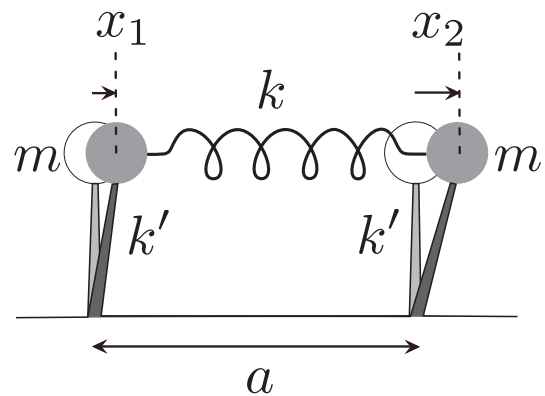
(a) 運動エネルギーを x_1, x_2 を用いて表せ。

(b) ポテンシャルエネルギーを x_1, x_2 を用いて表せ。

(c) ラグランジアンを x_1, x_2 を用いて書け。

(d) x_1, x_2 を座標変換して、ラグランジアンを対角化せよ。また、変換された座標がどのような運動に対応しているかを説明せよ。

(e) オイラー・ラグランジュ方程式を書いて、各質点の位置一般解 $x_1(t), x_2(t)$ を求めよ。



学籍番号		
氏名		