

剛体の力学：慣性モーメントテンソルの計算

問 1. 次の手順で、円すいの慣性モーメントテンソルを求めよう。

- (a) 剛体の重心のまわりの慣性モーメントテンソル I_{ab} と、重心から s だけ離れた点のまわりの慣性モーメント I'_{ab} との間には、

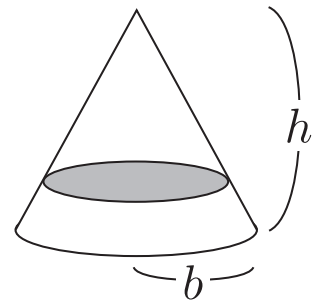
$$I'_{ab} = I_{ab} + M \left(|s|^2 \delta_{ab} - s^a s^b \right) \quad (1)$$

という関係があることを示せ。（ M は剛体の質量）

- (b) 半径 a 、質量 m の円盤の、中心のまわりの慣性モーメントテンソルを求めよ。

学籍番号		
氏名		

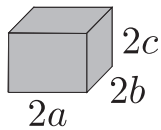
- (c) 円すい（底面半径 b , 高さ h ）の重心を求め、重心のまわりの慣性モーメントテンソルを求めよ。
 ヒント：円すいは、円盤を積み重ねたものとみなすことができる。前2問の結果をうまく使おう。



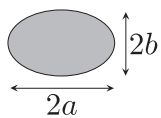
剛体の力学：慣性モーメントテンソルの計算

問 2. 以下の場合について、重心の位置を求め、重心まわりの慣性モーメントテンソルを計算せよ。

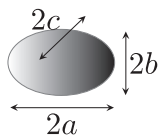
- (a) 各辺が $2a, 2b, 2c$ の直方体（一様密度、質量 M ）



- (b) 両軸が $2a, 2b$ の楕円板（一様密度、質量 M ）



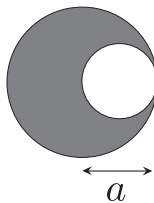
- (c) 3軸が $2a, 2b, 2c$ の楕円体（一様密度、質量 M ）



学籍番号		
氏名		

(d) 半径 a の円板（一様密度、質量 M ）

(e) 半径 a の円板から、その半径を直径とする円板を切り抜いた残り（一様密度、質量 M ）



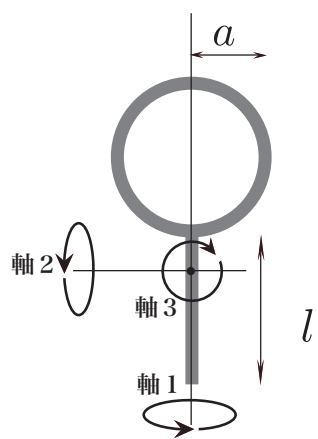
剛体の力学 テニスラケットの問題

問 3. テニスラケットの慣性モーメントテンソルを計算しよう。

計算を簡単にするため、図のように、テニスラケットを簡略化する。一様密度の円環（半径 a 、質量 m_a ）と細長い棒（長さ l 、質量 m_l ）をつなげたもので置き換える。ガットは考えない。

- (a) ラケットの慣性主軸は、図の通りに、棒のまわり（軸 1）、円環面内の軸まわり（軸 2）、円環面に垂直な軸まわり（軸 3）になると予想される。その理由を述べよ。（計算は不要）
- (b) ラケットの全質量を $M = m_a + m_l$ とおき、重心の位置を求めよ。円環の中心からの距離はいくらか。
- (c) 円環部分の中心まわりの慣性モーメントテンソルを求めよ。
- (d) 棒部分の中心まわりの慣性モーメントテンソルを求めよ。
- (e) ラケット全体の重心まわりの慣性モーメントテンソルを求めよ。前回の問題で示した、重心以外のまわりの慣性モーメントテンソルと重心まわりのものとの関係式を用いるとよい。
- (f) 直交軸の定理 $I_3 = I_1 + I_2$ を確かめよ。
- (g) ラケットの数値を、 $a = 0.13 \text{ m}$ 、 $l = 0.38 \text{ m}$ 、 $m_a = 0.15 \text{ kg}$ 、 $m_l = 0.18 \text{ kg}$ である。このときの主慣性モーメントを計算し、それらの大小関係を調べよ。

学籍番号		
氏名		



問 4. 重力や空気抵抗による影響は小さく無視できるものとして、ラケットの回転運動を調べる。

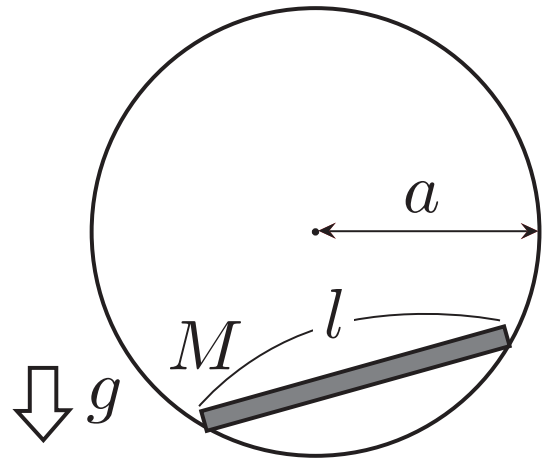
- (a) オイラーの運動方程式を書き出せ。角速度の各成分を $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ とせよ。
- (b) 直交軸の定理を使って、オイラーの運動方程式を書き直せ。さらに、前問 (g) の結果から、 $(I_2 - I_1)/(I_2 + I_1) \approx 1$ と近似して、方程式を簡単にせよ。
- (c) 軸 1 のまわりに回転させてみよう。回転軸のぶれは小さいから、 ω_2 と ω_3 の積は無視できる。 ω_1 が一定になることを示せ。
- (d) 残りの回転 ω_2, ω_3 についてのオイラーの式を、うまく座標変換して解け。
- (e) 角速度の成分は、 ω_1 に比べて残りの 2 つはとても小さくなることを確かめよ。このことから、ラケットはどのような運動をすると考えられるか？ また、回転運動の安定性を議論せよ。
- (f) 軸 2 まわりに回転させる場合はどうなるか？
- (g) 軸 3 まわりの回転させる場合はどうなるか？

学籍番号		
氏名		

剛体の運動

問 5. 鉛直面内に固定された円周上（半径 a ）に、両端がなめらかに束縛された棒（一様密度で、質量 M 、長さ l 、 $l < 2a$ ）の運動を求めよ。

- (a) 円の中心と棒の両端を頂点とする三角形が形を変えないことを示せ。
- (b) 棒の回転中心はどこか？
- (c) その場合の棒の慣性モーメントを計算せよ。
- (d) 系の運動エネルギーを表せ。
- (e) 系のポテンシャルエネルギーを表せ。
- (f) ラグランジアンを書け。
- (g) オイラー・ラグランジュ方程式を書け。
- (h) 平衡位置からのずれが小さいとして、上式を簡単にせよ。
- (i) その場合の一般解を求めよ。



学籍番号		
氏名		