

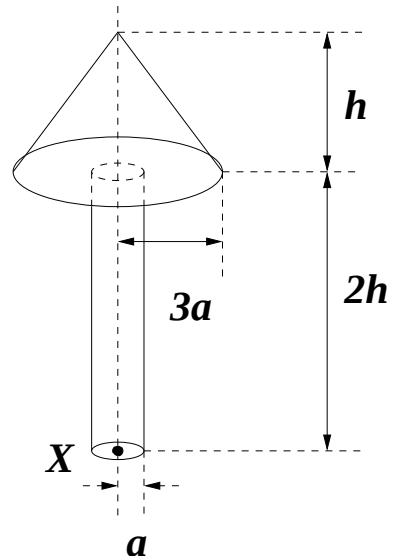
剛体の力学：回転

問 1. 図のような、一様な密度 ρ を持つ軸対称な物体がある。この物体の下端 X が固定され、鉛直方向に動くようになっている。以下の問いに答えよ。

- (a) 物体の全質量を M とするとき、 M を ρ 、 a 、および h を用いて表せ。
- (b) この物体の重心の位置はどこにあるか。
- (c) この物体の点 X における慣性モーメントテンソル I_{ab} を求めよ。特に慣性主軸を求めて、慣性モーメントテンソルを対角行列

$$I_{ab} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

の形で M 、 h 、および a を用いて求めよ。



学籍番号		
氏名		

剛体の力学：オイラー角 回転

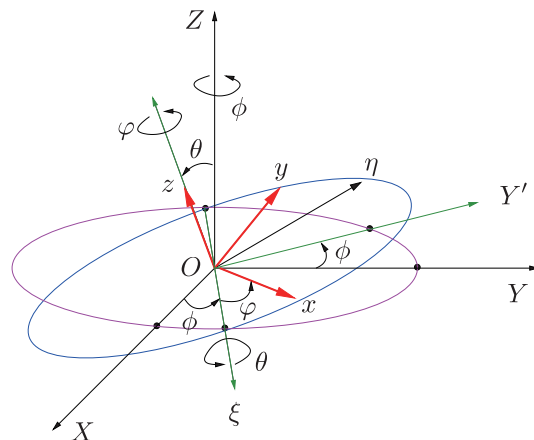
問 2. 剛体の回転運動について、これまでとは異なり、空間に固定された座標系を用いる代わりに、剛体に固定されて共回転する座標系を用いることにする。空間に固定された座標系 X, Y, Z を基準にして、剛体に固定されて時間変化する座標系 x, y, z （原点 O は固定）自体の回転で記述する。自由度は 3 であるから、3 つの変数をとる。以下のようなオイラーの角 θ, ϕ, φ を導入する。

図のように、空間に固定されたもとの座標系 X, Y, Z

と時間変化する座標系 x, y, z をとる。

XY 平面と xy 平面（それぞれ 2 つの円で描かれている）の交線方向に ξ 軸をとる。

- θ : Z 軸から z 軸への回転角。
 $0 \leq \theta \leq \pi$
- ϕ : X 軸から ξ 軸への回転角。
 $0 \leq \phi \leq 2\pi$
- φ : ξ 軸から x 軸への回転角。
 $0 \leq \varphi \leq 2\pi$



(a) オイラーの角で記述される 3 つの回転を、それぞれ 3×3 の回転行列で表せ。

(b) これら 3 つの回転行列を使うと、もとの座標系で (X, Y, Z) という成分をもつベクトルが新しい座標系での成分 (x, y, z) として

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

で表される。この逆変換を用いて、新しい座標系 x, y, z の基底ベクトル e_a ($a = 1, 2, 3$) をもとの座標系の基底ベクトル i, j, k で表せ。

(c) e_a ($a = 1, 2, 3$) の時間微分を e_a ($a = 1, 2, 3$) で表せ。

学籍番号		
氏名		

剛体の力学：オイラー角 回転

問 1. （つづき）

(d) 角速度ベクトル ω を求めよ。 $\dot{e}_a = \omega \times e_a$ を使おうとよい。

学籍番号		
氏名		

問 1. (つづき)

- (e) 角速度ベクトル ω の各成分に対応する主慣性モーメントを I_1, I_2, I_3 とおき、剛体の回転の運動エネルギーを求めよ。
- (f) 剛体の回転運動についてのラグランジアンを求めよ。オイラーの角の 3 つの変数で表記することに注意せよ。
- (g) この場合のオイラー・ラグランジュ方程式を求めよ。
- (h) 変数変換して、オイラーの角 θ, ϕ, φ を ω_a ($a = 1, 2, 3$) で表しなおし、オイラーの方程式と等価であることを示せ。

学籍番号		
氏名		

剛体の力学 剛体振り子で重力加速度を測る

問 2. 振り子の振動数を測り、重力加速度を求めることはあまりに理想的で、実際には難しい。振り子の糸や棒には質量が、質点には有限の大きさがあるためである。振り子は剛体として扱わないといけない。

前問の結果をみると、 ω と M は実際に計測できそうだが、 I や h は測れそうにない。どうしよう？

そこで、

- (a) まず、慣性モーメントを重心まわりの慣性モーメント I_G で表せ。（平行軸の定理）
- (b) 次に、重心から h' だけ離れた位置 B をあたらし固定軸として、振動数の計測実験を行おう。前問と同様に、振動角が小さい条件で、振動数 θ' を計算せよ。
- (c) 2 つめの固定点 B を $\omega = \omega'$ となるように選べたとする。そのときの振動数を ω_0 とすると

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{h + h'}}$$

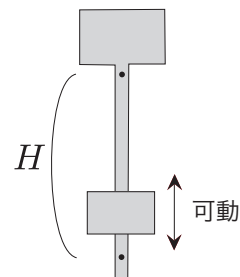
と表せることを示せ。

- (d) 実験で重心位置を正確に計測するのは困難なので、 h と h' を直接求めることが出来ない。これを回避するため、 B を選ぶ際に、2 つの固定点と重心が一直線上に並ぶようにうまく選んだとする。そうすると、2 つの固定点間の距離 $h + h'$ なら実測可能である。

$$h + h' = H$$

と (c) の結果を用いて、重力加速度が実験値 ω_0, H で求められることを示せ。

実際には、2 つめの固定点 B の位置を調節するのではなく、図のように、振り子の一部（おもり）が可動で、2 つの振動数が等しくなるようにおもりの位置を調節する。（ケーター振り子）



学籍番号		
氏名		