

正準理論：正準方程式

問 1. 速度によらない力を受けて運動している質量 m の質点について、3 次元極座標 (r, θ, ϕ) を用いて、以下の問に答えよ。

- (a) ポテンシャルエネルギーを $U(r, \theta, \phi)$ として、ラグランジアンを書け。
- (b) 座標 r, θ, ϕ に共役な運動量 p_r, p_θ, p_ϕ を求めよ。
- (c) 運動エネルギーを $T = T(q, p)$ の形式で表せ。
- (d) 中心力の場合、循環座標になるのはどれか。また、何が一定となるか。
- (e) 中心力場の場合にハミルトン関数を 3 次元極座標 (およびその共役運動量) を用いて表せ。
- (f) 正準方程式を書け。
- (g) これらが (a) で求めたラグランジアンから導かれるオイラー・ラグランジュ方程式と一致することを確認せよ。

学籍番号		
氏名		

ポアソン括弧、Lenz ベクトル

問 2. 惑星の運動を調べてみよう。

簡単のため、太陽（質量 m_1 、位置ベクトル r_1 ）と惑星（質量 m_2 、位置ベクトル r_2 ）1 つの運動だけを考え、それぞれを質点として扱うことにする。

- (a) 太陽と惑星の間には万有引力がはたらいている。万有引力定数を G として、ポテンシャルエネルギーを表せ。
- (b) この系の運動エネルギーを表せ。
- (c) ラグランジアンを重心の位置ベクトル R と相対位置ベクトル $r = r_2 - r_1$ を用いて表せ。ただし全質量を $M = m_1 + m_2$ 、換算質量を $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ として m_1 および m_2 のかわりのこれらを用いよ。
- (d) r に正準共役な運動量 p を求めよ。
- (e) ハミルトニアンを求めよ。 R に正準共役な運動量を P とする。

以下では、重心からの相対運動だけについて考えよう。

(f) Lenz ベクトル

$$A = \frac{1}{G\mu^2 M} p \times L - \frac{r}{r}$$

について、 $\{A, H\}$ を計算せよ。ただし、 $L = r \times p$ は角運動量で保存する。

- (g) 上の結果から、何が言えるか。
- (h) また、このほかにもエネルギーや角運動量が保存されることから、系全体でいくつの保存量があるか？
- (i) これらの保存量の独立性を議論しなさい。
(ヒント) 相対運動に限ると自由度は 3 で、位相空間は 6 次元になる。保存量の数の方が多くなってしまふ！たとえば、 $A \cdot L$ を計算してみよ。

学籍番号		
氏名		

正準変換

問 3. 以下の母関数による正準変換 $(\{q\}, \{p\}) \rightarrow (\{Q\}, \{P\})$ を求めよ。また、1 つの質点のハミルトニアンが $H = p^2/2m + V(q)$ で与えられているとき、新しいハミルトニアンはどう書けるか？

(a) $W_1 = \sum_{i=1}^n q_i Q_i$

(c) $W_3 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{q} - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{P} t - m \mathbf{q}) + \mathbf{a} \cdot \mathbf{P} - \frac{m}{2} \mathbf{v}^2 t$

ただし、 $\mathbf{a}$, $\mathbf{v}$ は定数。

(b) $W_3 = \sum_{i=1}^n q_i P_i + f(\{q\}, t)$

学籍番号		
氏名		

問 4. デカルト座標 (x, y, z, p_x, p_y, p_z) から極座標 $(r, \theta, \phi, p_r, p_\theta, p_\phi)$ への正準変換について母関数 $W_2(p_x, p_y, p_z, r, \theta, \phi, t)$ を求めなさい。

正準変換

問 5. 1 つの質点 (質量 m) のハミルトニアンが (r, p) を用いて、

$$H = \frac{p^2}{2m} + U(r)$$

で与えられている。母関数

$$\Psi = p'_x(x \cos \omega t + y \sin \omega t) + p'_y(-x \sin \omega t + y \cos \omega t) + p'_z z$$

によって、 (r', p') に変換してみよう。

- (a) $r' = (x', y', z')$ および $p' = (p'_x, p'_y, p'_z)$ を $r = (x, y, z)$ と $p = (p_x, p_y, p_z)$ で表せ。
- (b) 変換されたハミルトニアンを新しい変数を用いて表せ。
- (c) この変換の意味を述べよ。
- (d) 変換された変数に対する正準方程式を書け。
- (e) $m \frac{d^2 r'}{dt^2}$ を求め、(c) の結果を確かめよ。

学籍番号		
氏名		