

課題 1 の解説

第 1 回目の演習は、力学（おもに数学的手法でやったこと）の確認です。今後の講義を理解していく上で必要ですから、必ずマスターしてください。

問 1：2 階線形微分方程式を解く問題

物理学でもっともよくでてくる微分方程式です。解き方は「数学的手法」（以下、手法と省略）の 4 章 26 ページをみて復習しましょう。注意するのは、特性方程式が重解になるとき、もう 1 つの基本解を見つけるのをわすれないこと。

係数 a, b の符号や大小によって、特性方程式の解の符号が変化し、 t が大きいときに関数 x が収束するか発散するかがきまりそうです。

(a) $x = e^{\lambda t}$ において代入すると、

$$x(\lambda^2 - \lambda a + b) = 0$$

となる。 $x = 0$ は自明の解であるから、以下はそれ以外のもの ($x \neq 0$) を求める。

判別式の値 $D = a^2 - 4b$ によって、 λ は場合分けされる。

1. $D > 0$ のとき

$$\lambda = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

は、実数になる。2 つの解を順に λ_1, λ_2 とすると、一般解は

$$x = C_1 \exp(\lambda_1 t) + C_2 \exp(\lambda_2 t)$$

とかける、ただし、 C_1, C_2 は積分定数。

$b < 0$ のとき、平方根の値の大きさが a よりも大きくなることから、

$$\lambda_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} > \frac{a + |a|}{2} = 0$$

$$\lambda_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2} < \frac{a - |a|}{2} = 0$$

なので、 C_1 がゼロとなる初期条件以外では、 x は t の大きい領域で発散する。

$b > 0$ のとき、平方根の値の大きさが a よりも小さくなることから、

$$\frac{a}{2} < \lambda_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} < \frac{a + |a|}{2}$$

$$\frac{a}{2} > \lambda_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2} > \frac{a - |a|}{2}$$

となる。 $a > 0$ なら λ_1, λ_2 とも正になり発散、 $a < 0$ なら負になり収束する。

2. $D < 0$ のとき λ は複素数になる。

$$\lambda_1 = \frac{a + i\sqrt{4b - a^2}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{a - i\sqrt{4b - a^2}}{2}$$

で、 $a > 0$ なら発散、 $a < 0$ なら収束する。

3. $D = 0$ のとき

λ_1 と λ_2 が等しくなるので、もう 1 つ基本解をみつけないといけない。 $x = f(t) \exp(\lambda t)$ とおきなおして元の微分方程式に代入すると、 $f(t)$ の条件式が得られる。

$$(\ddot{f} + 2\dot{f}\lambda + f\lambda^2) + a(\dot{f} + f\lambda) + bf = 0$$

$$\ddot{f} + (2\lambda + a)\dot{f} + f(\lambda^2 + a\lambda + bf) = 0$$

$$\ddot{f} = 0$$

したがって、 $f = \alpha t + \beta$ となる。

解は、

$$x = (\alpha t + \beta) \exp\left(-\frac{a}{2}t\right)$$

となり、 $a > 0$ のとき発散、 $a < 0$ のとき収束する。

(b) 空気抵抗のある物体の運動など。

問 2 : 多変数関数の微分

偏微分や全微分を正しく理解しているかどうかの確認です。これができないと、この先の講義は理解できません。手法の第 2 章 21 ページあたりをよく復習してください。

- (a) y, z, t を一定に保って、 x だけについての变化をみる。

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2axy - \frac{bx}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

- (b) x, y, z を一定に保って、 t だけについての变化をみる。

$$\frac{\partial f}{\partial t} = c\omega \cos \omega t$$

- (c)

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

だから、 dt で割ると

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

となり、

$$\frac{df}{dt} = \left\{ 2axy - \frac{bx}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \right\} \dot{x} + ax^2 \dot{y} - \frac{bz}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \dot{z} + c\omega \cos \omega t$$

問 3 : グラディエントを計算する問題

手法の第 2 章 13 ページを読み返してください。

(a)~(c) の 3 つの異なる座標系での ∇ の表式を用いて計算してもいいのだが、どれか 1 つの座標系で計算した結果をそれぞれの基底ベクトルで表し直せばよい。

そもそも、この問題のポテンシャルは中心力であるから、力は動径方向成分のみで表されることも覚えておこう。

(a) デカルト座標系では、

$$-\nabla\phi = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\phi$$

ϕ が $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ の関数であるから、 R を介して

$$-\nabla\phi = -\left(\frac{\partial R}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial R}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial R}{\partial z}\mathbf{k}\right)\frac{\partial\phi}{\partial R}$$

と書ける。

$$\frac{\partial R}{\partial x} = -\frac{x}{R}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = -\frac{y}{R}, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = -\frac{z}{R}$$

と

$$\frac{\partial\phi}{\partial R} = n\alpha\frac{1}{R}\left(\frac{R}{a}\right)^n$$

と計算できるので、

$$\begin{aligned} -\nabla\phi &= -n\alpha\frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{R^2}\left(\frac{R}{a}\right)^n \\ &= -n\frac{\mathbf{R}}{R^2}\phi \end{aligned}$$

(b) (問題文を訂正 $r \rightarrow \rho$)

$R^2 = \rho^2 + z^2$ であるから、

$$-\nabla\phi = -n\frac{\rho\mathbf{e}_\rho + z\mathbf{e}_z}{R^2}\phi$$

(c) $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$ であるから、

$$-\nabla\phi = -n\frac{\mathbf{e}_r}{R}\phi$$

円柱座標や極座標の ∇ の表式を間違えている人が多かった。計量因子に注意。

問 4：保存力に関する問題

この問題についても、手法の第 2 章 15 ページ付近をよく復習してください。

- 書くべきこと
 - (a) 仕事が経路に依存せず、始点と終点だけで定まる力のこと
 - (b) ポテンシャルエネルギーの導入
 - (c) ポテンシャルエネルギーと力の関係式
- 間違いの例
 - (a) エネルギーが保存する力のこと。
 - (b) 仕事の積分で、力や変位がスカラーになっている。