課題２の解説

　第２回目からは、解析力学の講義内容に入ります。まずは、ラグランジアンを求める練習です。

問１：ラグランジアンを求める

いろいろな系について、ラグランジアンを求めます。
　注意するのは、座標系の取り方です。物体の運動の自由度に応じて、変数をうまくとるのがポイントです。
　座標軸を設定し、運動エネルギーとポテンシャルエネルギーを書き出し、変数を独立変数のみになるように操作し、ラグランジアンを求める、という一連の手順を習得しましょう。

(a) ３次元重力下での質点の運動

水平方向に x, y 軸、鉛直上向きに z 軸をとる。質点の位置は (x, y, z) で表すことができ、速度は $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ となる。

質点の運動エネルギーは、

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

重力による位置エネルギーは、

$$U = mgz$$

したがって、ラグランジアンは

$$L(x, \dot{x}, y, \dot{y}, z, \dot{z}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$$

であり、オイラーラグランジュ方程式は以下の通り。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m\dot{x}) &= 0 \\ \frac{d}{dt}(m\dot{y}) &= 0 \\ \frac{d}{dt}(m\dot{z}) - mg &= 0 \end{aligned}$$

(b) 平面上の質点の運動

全問の設定に、水平面上に運動が拘束される条件が加わった。z が一定、一定値ならどこでもいいので、水平面を $z = 0$ にとる。

質点の運動エネルギーは、

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

重力による位置エネルギーはゼロ。

したがって、ラグランジアンは

$$L(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

であり、オイラーラグランジュ方程式は以下の通り。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m\dot{x}) &= 0 \\ \frac{d}{dt}(m\dot{y}) &= 0 \end{aligned}$$

(c) 円柱面上（半径 a）の質点の運動

運動が円柱面に拘束されていることから、最終的には、円柱座標で表すのがよい。デカルト座標の軸をどうとってもよいが、あとから円柱座標に変換することを考慮して、変換式が簡単になるようにするのが見やすく、計算間違いを防ぐことができる。

円柱の回転軸を x 軸、それに垂直で水平な軸を y 軸、鉛直上向きに z 軸をとる。質点の位置は、質点の位置は (x, y, z) で表すことができ、速度は $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ となる。

質点の運動エネルギーは、

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

重力による位置エネルギーは、

$$U = mgz$$

（ここまではどの問題も同じ）——————(*)

円柱面に拘束されているので、自由度が１つ減って、２である。運動を記述する独立変数は２個であるから、拘束条件 $y^2 + z^2 = a^2$ を使って、変数を１つ減らさないといけない。そうやってもよいが、動径成分が固定された円柱座標に変換してみる。

y, z を、仰角 θ（基準は底）で表すと、

$$\begin{aligned} y &= a\sin\theta \\ z &= -a\cos\theta \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \dot{y} &= a\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{z} &= a\dot{\theta}\sin\theta \end{aligned}$$

と表される。したがって、質点の運動エネルギーは、

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + a^2\dot{\theta}^2)$$

重力による位置エネルギーは、

$$U = -mga\cos\theta$$

になる。ラグランジアンは、

$$L(x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + a^2\dot{\theta}^2) + mga\cos\theta$$

であり、オイラーラグランジュ方程式は以下の通り。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m\dot{x}) &= 0 \\ \frac{d}{dt}(ma^2\dot{\theta}) + mga\sin\theta &= 0 \end{aligned}$$

(d) 半球面上（半径 a）の質点の運動

球の中心を原点にとる。(*) までは前問と同じ。

極座標への変換は、

$$
\begin{aligned}
x &= a\cos\phi\sin\theta \\
y &= a\sin\phi\sin\theta \\
z &= -a\cos\theta
\end{aligned}
$$

であるから、時間微分をとると

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= a(\dot{\theta}\cos\phi\cos\theta - \dot{\phi}\sin\phi\sin\theta) \\
\dot{y} &= a(\dot{\theta}\sin\phi\cos\theta + \dot{\phi}\cos\phi\sin\theta) \\
\dot{z} &= a\dot{\theta}\sin\theta
\end{aligned}
$$

となる。これらを使うと、運動エネルギーは

$$
T = \frac{1}{2}ma^2(\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2)
$$

重力による位置エネルギーは、

$$
U = -mga\cos\theta
$$

になる。ラグランジアンは、

$$
L(\phi, \dot{\phi}, \theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}ma^2(\dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2) + mga\cos\theta
$$

であり、オイラーラグランジュ方程式は以下の通り。

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(ma^2\dot{\phi}) &= 0 \\
\frac{d}{dt}(ma^2\dot{\theta}) + mga\sin\theta &= 0
\end{aligned}
$$

問２：ラグランジアンの不定性

ラグランジアンをいくつも作れることを示します。

(b) の問題では、関数 F の時刻 t に関する全微分を計算できるかがポイントです。（課題１の問２でやりました。）

(a) 定数 c 倍されたラグランジアン $L'(q,\dot{q}) = cL(q,\dot{q})$ を考える。($c \neq 0$)

オイラー・ラグランジュ方程式の左辺は

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial cL}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial cL}{\partial q}$$

であり、L で表すと

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial cL}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial cL}{\partial q}$$

定数 c は微分の前に出すことができるので、

$$= c\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q}\right\}$$

括弧内は、L についてのオイラーラグランジュ方程式なのでゼロになるから、

$$= 0$$

L' についても、オイラーラグランジュ方程式が成り立つ。

(b) 関数 $F(x,t)$ の微小変化は、

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial t}dt$$

で表されるから、時間 t に関する全微分は、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F(x,t) &= \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial t} \\ &= \frac{\partial F}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial F}{\partial t}\end{aligned}$$

となる。ここで、$\frac{\partial F}{\partial x}$ は、x と $\dot{x}$ の関数である。

L' の $\dot{x}$ に関する微分は、

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial}{\partial \dot{x}}\frac{dF}{dt}$$

上で求めた F の時間 t に関する全微分を代入して

$$= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left\{\frac{\partial F}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial F}{\partial t}\right\}$$

$\frac{\partial F}{\partial x}$ や $\frac{\partial F}{\partial t}$ は $\dot{x}$ には依存しないので

$$= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial F}{\partial x}$$

となる。時間微分をとると、

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial x}$$

さらに、右辺２項の全微分を計算すると

$$\begin{aligned} &= \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{dx}{dt}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial x} \\ &= \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dot{x}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x} \end{aligned}$$

となる。

L' の x に関する微分は、

$$\frac{\partial L'}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{dF}{dt}$$

上で求めた F の時間 t に関する全微分を代入して

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial F}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial F}{\partial t}\right\} \\ &= \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\dot{x} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t} \end{aligned}$$

となる。

以上をまとめると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L'}{\partial x} &= \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dot{x}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\dot{x} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t}\right) \\ &= \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となり、L' についても、オイラーラグランジュ方程式が成り立つ。

問３：ラグランジアンを求める

振り子とバネ振り子を扱います。ラグランジアンを独立変数で表記することが問題になり、うまく座標軸を設定するのがポイントです。

振り子は質点の運動が拘束されて自由度が減るので、単に、質点位置をデカルト座標で表しただけでは変数が余分になる。振り子の棒の長さは一定である条件をうまく利用するため、極座標をとり、動径成分の変数を落とすやり方がよい。

一方、バネ振り子の場合は拘束されず自由度が減らないから、バネ振り子の場合には、各質点の位置が独立変数になる。もっとも簡単に、デカルト座標を用いるとよい。

(a) 振り子　２次元面内

振り子の振れの角度 θ（鉛直下向きを基準）を使って、質点の運動を表わすことができる。

運動エネルギー

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

重力の位置エネルギー

$$U = -mgl\cos\theta$$

ラグランジアンは

$$L(\theta,\dot{\theta}) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta$$

(b) ２重振り子

１段目の振れの角度 θ（鉛直下向きを基準）と２段目の振れの角度 η（鉛直下向きを基準）を使って、振り子の運動を記述できる。

１つめの質点の位置をデカルト座標で表すと

$$\begin{aligned} x_1 &= l\sin\theta \\ y_1 &= -l\cos\theta \end{aligned}$$

２つめの質点の位置をデカルト座標（x を水平、y を鉛直上向き）で表すと

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + l\sin\eta \\ &= l\sin\theta + l\sin\eta \\ y_2 &= y_1 - l\cos\eta \\ &= -l\cos\theta - l\cos\eta \end{aligned}$$

時間で微分すると

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= l\dot{\theta}\cos\theta \\ \dot{y}_1 &= l\dot{\theta}\sin\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= l\dot{\theta}\cos\theta + l\dot{\eta}\cos\eta \\ \dot{y}_2 &= l\dot{\theta}\sin\theta + l\dot{\eta}\sin\eta\end{aligned}$$

になるから、運動エネルギーは

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\ &= \frac{1}{2}ml^2\{2\dot{\theta}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\theta}\dot{\eta}(\cos\theta\cos\eta + \sin\theta\sin\eta)\} \\ &= \frac{1}{2}ml^2\{2\dot{\theta}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\theta}\dot{\eta}\cos(\theta - \eta)\}\end{aligned}$$

重力の位置エネルギーは

$$\begin{aligned}U &= mg(y_1 + y_2) \\ &= -mgl(2\cos\theta + \cos\eta)\end{aligned}$$

と表されるので、ラグランジアンは

$$L(\theta, \dot{\theta}, \eta, \dot{\eta}) = \frac{1}{2}ml^2\{2\dot{\theta}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\theta}\dot{\eta}\cos(\theta - \eta)\} + mgl(2\cos\theta + \cos\eta)$$

(c) バネ振り子　２次元面内

振り子の中心を原点に、水平方向に x 軸、鉛直上向きに y 軸をとり、質点の位置を x, y とおく。

運動エネルギーは

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

ポテンシャルエネルギーは

$$U = mgy + \frac{1}{2}k(\sqrt{x^2 + y^2} - l)^2$$

と表されるので、ラグランジアンは

$$L(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy - \frac{1}{2}k(\sqrt{x^2 + y^2} - l)^2$$

(d) ２重バネ振り子　２次元面内

振り子の中心を原点に、水平方向に x 軸、鉛直上向きに y 軸をとり、質点の位置を x_1, y_1 と x_2, y_2 とおく。

運動エネルギーは

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

ポテンシャルエネルギーは

$$U = mg(y_1 + y_2) + \frac{1}{2}k\{(\sqrt{x_1^2 + y_1^2} - l)^2 + (\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} - l)^2\}$$

と表されるので、ラグランジアンは

$$\begin{aligned} L(x, \dot{x}, y, \dot{y}) &= \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) - mg(y_1 + y_2) \\ &\quad - \frac{1}{2}k\{(\sqrt{x_1^2 + y_1^2} - l)^2 + (\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} - l)^2\} \end{aligned}$$

(e) 質点と棒

１つ目の質点の位置を (x, y, z)、棒の角度を θ と ϕ とすると、２つ目の質点の位置は、

$$\begin{aligned} x_2 &= x + l\cos\theta\sin\phi \\ y_2 &= y + l\sin\theta\sin\phi \\ z_2 &= z + l\cos\phi \end{aligned}$$

と表すことができる。時間微分は

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= \dot{x} - l\dot{\theta}\sin\theta\sin\phi + l\dot{\phi}\cos\theta\cos\phi \\ \dot{y}_2 &= \dot{y} + l\dot{\theta}\cos\theta\sin\phi + l\dot{\phi}\sin\theta\cos\phi \\ \dot{z}_2 &= \dot{z} - l\dot{\phi}\sin\phi \end{aligned}$$

となる。

運動エネルギーは

$$\begin{aligned}
T = &\quad \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2+\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2+\dot{z}_2^2) \\
= &\quad \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) \\
+ &\quad \frac{1}{2}m\{(\dot{x}-l\dot{\theta}\sin\theta\sin\phi+l\dot{\phi}\cos\theta\cos\phi)^2 \\
&\quad +(\dot{y}+l\dot{\theta}\cos\theta\sin\phi+l\dot{\phi}\sin\theta\cos\phi)^2 \\
&\quad +(\dot{z}-l\dot{\phi}\sin\phi)^2\}
\end{aligned}$$

ポテンシャルエネルギーは

$$U = 0$$

であるから、ラグランジアンは

$$\begin{aligned}
&L(x,\dot{x},y,\dot{y},z,\dot{z},\theta,\dot{\theta},\phi,\dot{\phi}) \\
&= \frac{1}{2}m\{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2+(\dot{x}-l\dot{\theta}\sin\theta\sin\phi+l\dot{\phi}\cos\theta\cos\phi)^2 \\
&+(\dot{y}+l\dot{\theta}\cos\theta\sin\phi+l\dot{\phi}\sin\theta\cos\phi)^2+(\dot{z}-l\dot{\phi}\sin\phi)^2\}
\end{aligned}$$

(f) 質点と棒　２次元面内

１つめの棒の振れの角度θ（水平軸x軸を基準）と２つめの棒の振れの角度η（水平軸x軸を基準）と真ん中の質点の位置座標(x,y)を使って、系の運動を記述できる。

１つめの質点の位置をデカルト座標で表すと

$$\begin{aligned}
x_1 &= x+l\cos\theta \\
y_1 &= +l\sin\theta
\end{aligned}$$

３つめの質点の位置をデカルト座標で表すと

$$\begin{aligned}
x_2 &= x+l\cos\eta \\
y_2 &= y-l\sin\eta
\end{aligned}$$

時間で微分すると

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \dot{x}-l\dot{\theta}\sin\theta \\
\dot{y}_1 &= \dot{y}+l\dot{\theta}\cos\theta
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_2 &= \dot{x} - l\dot{\eta}\sin\eta \\
\dot{y}_2 &= \dot{y} + l\dot{\eta}\cos\eta
\end{aligned}
$$

になるから、運動エネルギーは

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\
&= \frac{3}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\eta}^2) \\
&\quad + ml\dot{\theta}(-x\sin\theta + y\cos\theta) + ml\dot{\eta}(-x\sin\eta + y\cos\eta)
\end{aligned}
$$

ポテンシャルエネルギーは

$$
U = 0
$$

なので、ラグランジアンは

$$
\begin{aligned}
L(x,\dot{x},y,\dot{y},\theta,\dot{\theta},\eta,\dot{\eta}) &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\
&= \frac{3}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\eta}^2) \\
&\quad + ml\dot{\theta}(-x\sin\theta + y\cos\theta) + ml\dot{\eta}(-x\sin\eta + y\cos\eta)
\end{aligned}
$$

(g) 質点とバネ

水平方向に x 軸、鉛直上向きに y 軸をとり、質点の位置を x_1, y_1 と x_2, y_2 とおく。

運動エネルギーは

$$
T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)
$$

ポテンシャルエネルギーは

$$
U = \frac{1}{2}k\{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} - l\}^2
$$

と表されるので、ラグランジアンは

$$
\begin{aligned}
&L(x_1,\dot{x}_1,y_1,\dot{y}_1,x_2,\dot{x}_2,y_2,\dot{y}_2) = \\
&\quad \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) - \frac{1}{2}k\{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} - l\}^2
\end{aligned}
$$

(h) 質点とバネ

水平方向に x 軸、鉛直上向きに y 軸をとり、大きな質点の位置を x_0, y_0、２つの小さい質点の位置をそれぞれ x_1, y_1 と x_2, y_2 とおく。

運動エネルギーは

$$T = \frac{1}{2}M(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) + \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

ポテンシャルエネルギーは

$$U = \frac{1}{2}k\{(\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} - l)^2 + (\sqrt{(x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2} - l)^2\}$$

と表されるので、ラグランジアンは

$$\begin{aligned} & L(x_0, \dot{x}_0, y_0, \dot{y}_0, x_1, \dot{x}_1, y_1, \dot{y}_1, x_2, \dot{x}_2, y_2, \dot{y}_2) \\ = & \frac{1}{2}M(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) + \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\ & -\frac{1}{2}k\{(\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} - l)^2 + (\sqrt{(x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2} - l)^2\} \end{aligned}$$

問４：回転する棒に通されたリング上の質点の運動

質点が回転するので遠心力、棒が斜めになっているので抗力が斜めになるため、普通に解くのは面倒な問題です。ラグランジュ形式で楽に解けることを味わってください。

参考書などをみると、ほとんどの場合、オイラーラグランジュ方程式をたててから対角化していますが、この問題では、先にラグランジアンを対角化してから解きます。

(a) 質点は棒上に拘束されているので、r と t の２変数で位置を表すことができる。デカルト座標で表した位置ベクトルとの関係は、

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\omega t \\ y &= r\sin\theta\sin\omega t \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}$$

であり、時刻 $t = 0$ のとき $x - y$ 平面に射影した回転角が x 軸を基準にゼロとなるように軸をとった。

上の関係式の時間微分をとると

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \dot{r}\sin\theta\cos\omega t - r\omega\sin\theta\sin\omega t \\
\dot{y} &= \dot{r}\sin\theta\sin\omega t + r\omega\sin\theta\cos\omega t \\
\dot{z} &= \dot{r}\cos\theta
\end{aligned}
$$

となり、質点の運動エネルギーは

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) \\
&= \frac{1}{2}m\{(\dot{r}\sin\theta\cos\omega t - r\omega\sin\theta\sin\omega t)^2 \\
&\quad +(\dot{r}\sin\theta\sin\omega t + r\omega\sin\theta\cos\omega t)^2 + (\dot{r}\cos\theta)^2\} \\
&= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\omega^2\sin^2\theta)
\end{aligned}
$$

ポテンシャルエネルギーは、重力の寄与によるものだけなので

$$
\begin{aligned}
U &= mgz \\
&= mgr\cos\theta
\end{aligned}
$$

となる。運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの両方の表式に t があらわれなくなっている。ラグランジアンは $r, \dot{r}$ だけの関数になって、

$$
\begin{aligned}
L(r,\dot{r}) &= T - U \\
&= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\omega^2\sin^2\theta) - mgr\cos\theta
\end{aligned}
$$

(b) ラグランジアンを変数 r について平方完成させる。

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2}m\left(r^2\omega^2\sin^2\theta - 2rg\cos\theta + \dot{r}^2\right) \\
&= \frac{1}{2}m\left\{\left(r\omega\sin\theta - \frac{g\cos\theta}{\omega\sin\theta}\right)^2 - \left(\frac{g\cos\theta}{\omega\sin\theta}\right)^2 + \dot{r}^2\right\} \\
&= \frac{1}{2}m\left\{\alpha^2\left(r - \frac{g\cos\theta}{\alpha^2}\right)^2 - \left(\frac{g\cos\theta}{\alpha}\right)^2 + \dot{r}^2\right\}
\end{aligned}
$$

ラグランジアンに定数を加えても、定数倍しても、運動方程式が不変である性質を使う。括弧 $\{\cdots\}$ 内の２つ目の項は定数であるから、結局

$$
L = \alpha^2\left(r - \frac{g\cos\theta}{\alpha^2}\right)^2 + \dot{r}^2
$$

となり、あたらしく $s = r - g\cos\theta/\alpha^2$ を用いると $\dot{s} = \dot{r}$ だから

$$L(s, \dot{s}) = \alpha^2 s^2 + \dot{s}^2$$

となる。

(c) オイラーラグランジュ方程式をたてて解くと

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial L}{\partial s} &= 0 \\
\frac{d}{dt}(2\dot{s}) - 2\alpha^2 s &= 0 \\
\ddot{s} &= \alpha^2 s \\
s &= C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{-\alpha t}
\end{aligned}$$

ただし C_1, C_2 は積分定数。

(d) 時刻 $t = 0$ のとき、$s = 0$ の釣り合い位置からわずかにずれて $s = \Delta s$ で静止（$\dot{s} = 0$）していたとする。このときの C_1, C_2 を求めると、

$$\begin{aligned}
\Delta s &= C_1 + C_2 \\
0 &= \alpha(C_1 - C_2)
\end{aligned}$$

となり

$$\begin{aligned}
C_1 &= \frac{\Delta s}{2} \\
C_2 &= \frac{\Delta s}{2}
\end{aligned}$$

と決められる。つまり

$$s = \frac{\Delta s}{2}\left(e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}\right)$$

と求まる。この関数が t の偶関数（t の符号によらない）であることと、極値が $t = 0$ のみであることから、$\Delta s = 0$ である場合をのぞいて $s = 0$ と交わることはない。釣り合い位置 $s = 0$ から一旦ずれると、２度と戻ってこない。したがって、$s = 0$ は不安定な釣り合いである。