

課題 3 の解説

問 1 : ブランコのひねり運動

ひねると、天井から吊られている棒の長さは一定なので、質点の高さが変化します。一見するとややこしい問題ですが、自由度が1つで、ひねり角度 θ だけでひねり運動を記述できることに気づくことがポイントです。

この問題の最後では、ひねり角が小さいものとして、微小振動を求めます。

- (a) 2 質点の中心は、棒をつり下げている 2 点の中心を通る鉛直線上にある。よって、2 質点はこの線に対して軸対象であるから、2 質点の高さは等しく、2 質点間の棒は水平になる。

棒がつり下げられている天井の 2 点の中心を原点に、水平方向に x, y 軸を、鉛直上向きに z 軸をとる。ブランコの平衡点で、2 質点間の棒と x 軸が平行になるように x 軸をとる。

2 質点の位置（複合同順）は、

$$\begin{aligned}x &= \pm \frac{l}{2} \cos \theta \\y &= \pm \frac{l}{2} \sin \theta\end{aligned}$$

と θ のみで表すことができる。

天井のからつり下げられている棒の長さが変化しないことを考慮すると、棒の支点 $(\pm \frac{l}{2}, 0, 0)$ からの距離が l であるから、条件がもう 1 つ

$$\begin{aligned}(x \mp \frac{l}{2})^2 + y^2 + z^2 &= l^2 \\ \left(\frac{l}{2}\right)^2 (\pm \cos \theta \mp 1)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \sin^2 \theta + z^2 &= l^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z^2 &= \left(\frac{l}{2}\right)^2 \{4 - (\cos \theta - 1)^2 - \sin^2 \theta\} \\
&= \left(\frac{l}{2}\right)^2 \{4 - (\cos^2 \theta - 2 \cos \theta + 1) - \sin^2 \theta\} \\
&= l^2 \frac{1 + \cos \theta}{2}
\end{aligned}$$

となる。 z の負の方向を考えているから、

$$z = -l \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$$

となる。天井からの高さは、

$$l \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$$

になる。倍角の公式を使うと

$$\begin{aligned}
z &= l \sqrt{\frac{1 + (\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2})}{2}} \\
&= l \sqrt{\frac{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{2}} \\
&= l \cos \frac{\theta}{2}
\end{aligned}$$

(b) 運動エネルギーは

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2} m ((-\dot{x})^2 + (-\dot{y})^2 + \dot{z}^2) \\
&= m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \\
&= m \left\{ \left(\frac{l\dot{\theta}}{2} \sin \theta \right)^2 + \left(\frac{l\dot{\theta}}{2} \cos \theta \right)^2 + \left(\frac{l\dot{\theta}}{2} \sin \frac{\theta}{2} \right)^2 \right\} \\
&= m \left(\frac{l\dot{\theta}}{2} \right)^2 \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)
\end{aligned}$$

ポテンシャルエネルギーは

$$\begin{aligned} U &= mgz + mgz \\ &= -2mgl \cos \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

(c) ラグランジアンは

$$L(\theta, \dot{\theta}) = m \left(\frac{l\dot{\theta}}{2} \right)^2 \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + 2mgl \cos \frac{\theta}{2}$$

(d)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{ml^2 \dot{\theta}}{2} \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = m \left(\frac{l\dot{\theta}}{2} \right)^2 \left(\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right) - mgl \sin \frac{\theta}{2}$$

であるから、オイラーラグランジュ方程式は

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta}$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{ml^2 \dot{\theta}}{2} \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right\} = m \left(\frac{l\dot{\theta}}{2} \right)^2 \left(\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right) - mgl \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{l^2 \dot{\theta}}{2} \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right\} = \left\{ \left(\frac{l\dot{\theta}}{2} \right)^2 \left(\cos \frac{\theta}{2} \right) - mgl \right\} \sin \frac{\theta}{2}$$

(e) $\theta \ll 1$ のとき、左辺の括弧内は

$$1 \gg \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

なので、2項目は無視できる。右辺の括弧内は、2項目 mgl は定数であり、 $\dot{\theta} \ll 1$ であるから、1項目は無視できる。したがって、オイラーラグランジュ方程式は次のように書ける。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{l^2 \dot{\theta}}{2} \right) = -gl \sin \frac{\theta}{2}$$

$\sin \theta \approx \theta$ であるから、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{l^2 \dot{\theta}}{2} \right) &= -gl \frac{\theta}{2} \\ \ddot{\theta} &= -\frac{g}{l} \theta \end{aligned}$$

となる。

$$\theta = c_1 \exp \left(i \sqrt{\frac{g}{l}} t \right) + c_2 \exp \left(-i \sqrt{\frac{g}{l}} t \right)$$

振動数 $\sqrt{g/l}$ で振動する。

問2：2点を結ぶ最短曲線

曲線を

$$x = x(p)$$

$$y = y(p)$$

というように変数 p を用いたパラメーター表示にする。こうすることで、傾きが無限大になったり、1つの x の値に対して2つ以上の y の値をとる場合を含めることができる。(多くの参考書などでは、 $y = y(x)$ とおいて出発している。)

微小線分は

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \\ &= dp \sqrt{\left(\frac{dx}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dp}\right)^2} \end{aligned}$$

で表されるので、AB 間の距離はつぎのように書ける。

$$\int_A^B ds = \int_A^B dp \sqrt{\left(\frac{dx}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dp}\right)^2}$$

これを最小にする $x(p)$, $y(p)$ の条件は、

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dp}\right)^2} \\ &= \sqrt{x'^2 + y'^2} \end{aligned}$$

について

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp} \frac{\partial L}{\partial x'} &= \frac{\partial L}{\partial x} \\ \frac{d}{dp} \frac{\partial L}{\partial y'} &= \frac{\partial L}{\partial y} \end{aligned}$$

である。 L には、 x や y を含まれていないので、

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x'} &= \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = a \quad (= \text{const.}) \\ \frac{\partial L}{\partial y'} &= \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = b \quad (= \text{const.}) \end{aligned}$$

となり、2つを組み合わせると

$$\frac{x'}{a} = \frac{y'}{b}$$

両辺を p で積分すると

$$\begin{aligned}\frac{x'}{a} dp &= \frac{y'}{b} dp \\ \frac{x}{a} &= \frac{y}{b} + c \\ bx &= ay + C\end{aligned}$$

c は積分定数、 $C = abc$ とおいた。直線の式になることが示された。

問 3 : 2 重バネ振り子

ラグランジアンを対角化できるかがポイントです。

(a)

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}U &= \frac{1}{2}k(x_1 - l)^2 + \frac{1}{2}k(x_2 - x_1 - l)^2 - mgx_1 - mgx_2 \\ &= \frac{1}{2}k\{(x_1 - l)^2 + (x_2 - x_1 - l)^2\} - mg(x_1 + x_2)\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}L(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2) &= T - U \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{1}{2}k\{(x_1 - l)^2 + (x_2 - x_1 - l)^2\} + mg(x_1 + x_2)\end{aligned}$$

(d) 対角化するための準備として、 x_1, x_2 の平衡点（ポテンシャルの極小点）を求める。

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x_1} &= 0 \\ k\{(x_1 - l) - (x_2 - x_1 - l)\} - mg &= 0 \\ 2x_1 - x_2 &= \frac{mg}{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial x_2} &= 0 \\ k(x_2 - x_1 - l) - mg &= 0 \\ -x_1 + x_2 &= l + \frac{mg}{k}\end{aligned}$$

したがって、平衡位置は

$$\begin{aligned}x_1 &= l + \frac{2mg}{k} \\ x_2 &= 2l + \frac{3mg}{k}\end{aligned}$$

になる。これらの点を基準にした座標系

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1 &= x_1 - l - \frac{2mg}{k} \\ \tilde{x}_2 &= x_2 - 2l - \frac{3mg}{k}\end{aligned}$$

を使うと、ポテンシャルエネルギーは

$$U = \frac{1}{2}k \left\{ \left(\tilde{x}_1 + \frac{2mg}{k} \right)^2 + \left(\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1 + \frac{mg}{k} \right)^2 \right\} - mg(\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2) + C$$

と書ける。 $(C$ は定数分、以下も同様)

展開すると

$$\begin{aligned}U &= \frac{1}{2}k \left(2\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 + \tilde{x}_1 \frac{2mg}{k} + \tilde{x}_2 \frac{2mg}{k} - 2\tilde{x}_1\tilde{x}_2 \right) - mg(\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2) + C' \\ &= \frac{1}{2}k (2\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 - 2\tilde{x}_1\tilde{x}_2) + C''\end{aligned}$$

になり、1 次の項をうまく消去できて、2 次形式で書ける。ここまでが対角化する前の準備段階。

つぎに、2 次形式の部分を対角化する。手法の 5 章 53 ページでやった通り。ベクトルと行列をつかって表すと

$$U = \frac{k}{2} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}$$

になる。行列の固有値は、永年方程式

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

から求めることができて、

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{1 \mp \sqrt{5}}{2} \tilde{x}_1 = \tilde{x}_2$$

なので、固有ベクトルはそれぞれ

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

となり、対角化の直行行列

$$\begin{aligned} S &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ -\frac{\sqrt{5}-1}{2} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}; \quad \alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{aligned}$$

が求められる。

ポテンシャルエネルギーを体格化して表すと

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{k}{2} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 & \tilde{x}_2 \end{pmatrix} \frac{S S^{-1}}{|S|} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{S S^{-1}}{|S|} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{k}{2|S|} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 - \alpha\tilde{x}_2 & \alpha\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 - \alpha\tilde{x}_2 \\ \alpha\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{k}{2(1+\alpha^2)} \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

のようになる。ただし

$$\begin{aligned}
 X &= \tilde{x}_1 - \alpha\tilde{x}_2 \\
 Y &= \alpha\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2
 \end{aligned}$$

とおく。

運動エネルギーも X, Y を用いて以下のようにかける。

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{1}{2}m \left\{ \left(\frac{\dot{X} + \alpha\dot{Y}}{1+\alpha^2} \right)^2 + \left(\frac{-\alpha\dot{X} + \dot{Y}}{1+\alpha^2} \right)^2 \right\} \\
 &= \frac{m}{2(1+\alpha^2)} (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2)
 \end{aligned}$$

以上をまとめるとラグランジアンは対角化して表される。

$$L(X, \dot{X}, Y, \dot{Y}) = \frac{m}{2(1+\alpha^2)} (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) - \frac{k}{2(1+\alpha^2)} (\lambda_+ X^2 + \lambda_- Y^2)$$

定数倍してもよいので

$$= \dot{X}^2 + \dot{Y}^2 - \frac{k}{m} (\lambda_+ X^2 + \lambda_- Y^2)$$

(e) オイラーラグランジュ方程式は

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} - \frac{\partial L}{\partial X} &= 0 \\
 \ddot{X} + \frac{k}{m} \lambda_+ X &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Y}} - \frac{\partial L}{\partial Y} &= 0 \\ \ddot{Y} + \frac{k}{m} \lambda_- Y &= 0\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}X &= C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{k\lambda_+}{m}}t + \delta_1\right) \\ Y &= C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k\lambda_-}{m}}t + \delta_2\right)\end{aligned}$$

x_1, x_2 にもどすと

$$\begin{aligned}x_1 &= \tilde{x}_1 + l + \frac{2mg}{k} \\ &= \frac{X + \alpha Y}{1 + \alpha^2} + l + \frac{2mg}{k} \\ &= C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{k\lambda_+}{m}}t + \delta_1\right) + \alpha C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k\lambda_-}{m}}t + \delta_2\right) + l + \frac{2mg}{k} \\ x_2 &= \tilde{x}_2 + 2l + \frac{3mg}{k} \\ &= \frac{-\alpha X + Y}{1 + \alpha^2} + l + \frac{2mg}{k} \\ &= -\alpha C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{k\lambda_+}{m}}t + \delta_1\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k\lambda_-}{m}}t + \delta_2\right) + 2l + \frac{3mg}{k}\end{aligned}$$

問 4：最速降下曲線

位置 $(x, y = f(x))$ での質点の速さは、力学的エネルギー保存則より、 $v = \sqrt{2gy}$ である。

曲線 $y = f(x)$ の微小長さは、 $dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ と表され、通過にかか

る時間は、

$$\begin{aligned}
 dt &= \frac{dl}{v} \\
 &= \sqrt{\frac{(dx)^2 + (dy)^2}{2gy}} \\
 &= dx \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{2gy}}
 \end{aligned}$$

A, B 間の全体では、

$$T = \int_{x_A}^{x_B} dx \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}}$$

の時間がかかる。これを最小にする条件は、

$$\left(\frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial y'} - \frac{\partial}{\partial y} \right) \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}} = 0$$

これを直接解いてもいいが、ラグランジアンに対応する部分に x が直接含まれないことから、エネルギーに対応する量が保存する性質を使う。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial y'} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}} \cdot y' - \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}} &= C : \text{定数} \\
 \frac{y'^2}{\sqrt{2gy(1 + y'^2)}} - \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}} &= C \\
 \frac{y'^2 - (1 + y'^2)}{\sqrt{2gy(1 + y'^2)}} &= C \\
 \frac{-1}{\sqrt{2gy(1 + y'^2)}} &= C
 \end{aligned}$$

あらためて、変数部分のみについて

$$y(1 + y'^2) = 2C$$

とおくと、

$$\begin{aligned}y &= \frac{2C}{1+y'^2} \\&= \frac{2C \dot{x}^2}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \\&= C \left(1 - \frac{\dot{y}^2 - \dot{x}^2}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \right) \\&= C(1 - \cos t)\end{aligned}$$

となる。括弧内の2項目がとれる値は、 -1 から 1 の範囲であるから、

$$\frac{\dot{y}^2 - \dot{x}^2}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \cos t$$

で置き換えた。(＊)

x についても、 t をつかったパラメーター表示にしよう。上式を変形して、 $\dot{x}$ を求める。

$$\begin{aligned}\dot{x}^2(1 + \cos t) &= \dot{y}^2(1 - \cos t) \\ \dot{x}^2 &= \dot{y}^2 \frac{1 - \cos t}{1 + \cos t}\end{aligned}$$

ここに、 y の微分 $\dot{y} = C \sin t$ を代入すると

$$\begin{aligned}\dot{x}^2 &= C^2 \sin^2 t \frac{(1 - \cos t)^2}{1 - \cos^2 t} \\ \dot{x} &= C(1 - \cos t) \\ x &= C(t - \sin t)\end{aligned}$$

出発点 A を原点にとり、 $t = 0$ のとき $x = 0$ となるように積分定数を選んだ。
以上から、時間が最小となる曲線は

$$\begin{aligned}x &= C(t - \sin t) \\ y &= C(1 - \cos t)\end{aligned}$$

であり、サイクロイド曲線であることがわかる。

(*) つぎのように、 $\dot{x}, \dot{y}$ を極座標表示したになっている。 $\dot{x}$ 軸からの角度を θ とすると

$$\begin{aligned}\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} &= \cos \theta \\ \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} &= \sin \theta\end{aligned}$$

と書け、

$$\begin{aligned}\frac{\dot{y}^2 - \dot{x}^2}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ &= -\cos 2\theta\end{aligned}$$

となる。 $t = 2\theta + \pi$ と関係づけられる。