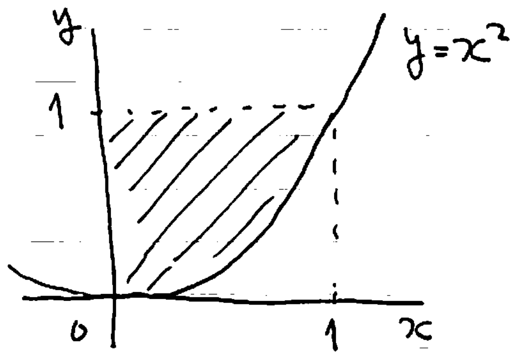
課題 4-1

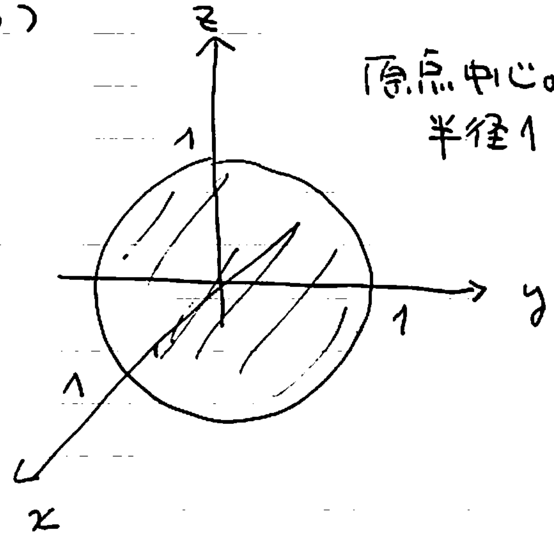
問1.

(a)



$$\frac{2}{5}$$

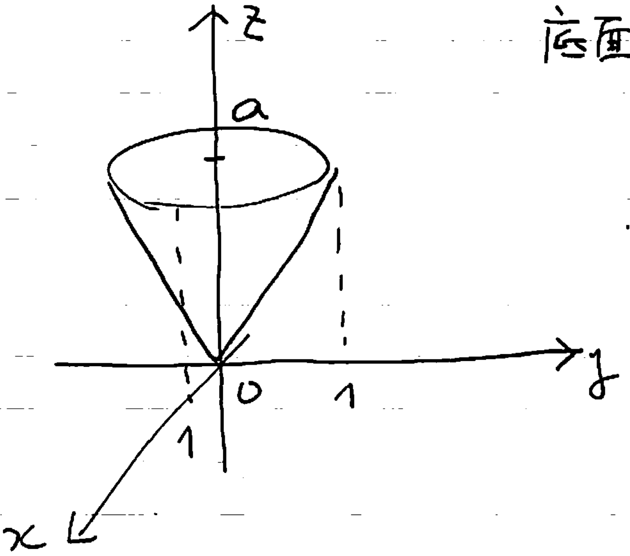
(b)



原点中心の
半径1の球内

$$\frac{4}{5}\pi$$

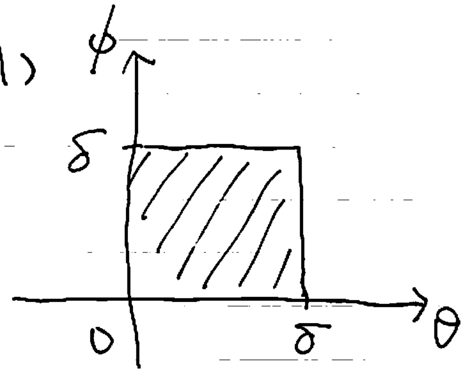
(c)



底面半径1，高さhの円錐内

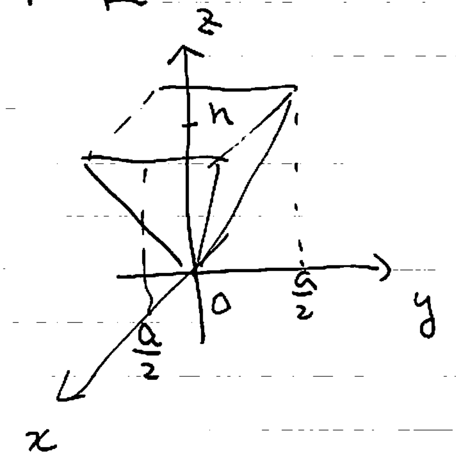
$$\frac{\pi a}{3}$$

(d)



$$2(1-\cos\delta)$$

問2



曲がっていても体積は変化しないので正四角錐の場合を考える。

$$V=\int_{-\frac{a}{2h}z}^{\frac{a}{2h}z}dx\int_{-\frac{a}{2h}z}^{\frac{a}{2h}z}dy\int_0^h dz$$

$$=\left(\int_{-\frac{a}{2h}z}^{\frac{a}{2h}z}dx\right)^2\int_0^h dz$$

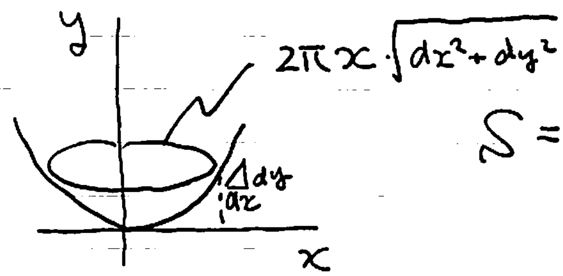
$$=\left(\frac{a}{h}\right)^2\cdot\frac{h^3}{3}=\frac{a^2h}{3}$$

重心は底面の中心と頂点を結ぶ直線上にあり、高さを求めればよい。正四角錐の場合を考えると楽。

$$\rho\int_{-\frac{a}{2h}z}^{\frac{a}{2h}z}dx\int_{-\frac{a}{2h}z}^{\frac{a}{2h}z}dy\int_0^h dz\,(z-z_G)=0$$

を解くと $z_G=\frac{3}{4}h$ 　頂点から $\frac{3}{4}h$ の点。

問3



$$S=\int_0^{x_0}dx\,2\pi x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$=\frac{2\pi}{3a^2}\left\{\left(1+a^2x_0^2\right)^{\frac{3}{2}}-1\right\}\quad\text{—(1)}$$

y軸対称なので重心はy軸上にある。
そこで重心位置を $(0,\ y_0)$ とおく。

y成分のモーメントのみを考えればよいので

$$\rho\int_0^{x_0}dx\cdot 2\pi x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,(y-y_0)=0$$

を解くと

$$y_0=\frac{3a}{10}\cdot\frac{l^4+l^3+l^2+1}{l^2+l+1}-\frac{1}{2a}$$

ただし $l=\sqrt{1+ax_0^2}$