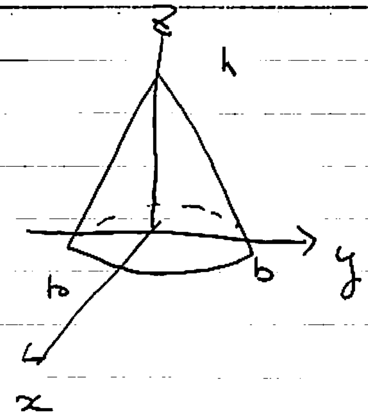
課題 5-1

問1 (a) 略

(b)
$$\begin{pmatrix} \frac{ma^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ma^2}{2} \end{pmatrix}$$



(C) 重心は 頂点から $\frac{3}{4}h$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{20}Mb^2+\frac{3}{80}Mh^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{20}Mb^2+\frac{3}{80}Mh^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{10}Mb^2 \end{pmatrix}$$

No.

問2 (a) 重心は中心

$$\begin{pmatrix} \frac{M}{3}(b^2+c^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M}{3}(a^2+c^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M}{3}(a^2+b^2) \end{pmatrix}$$

(b) 重心は中心.

$$\begin{pmatrix} \frac{M}{4}b^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M}{4}a^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M}{4}(a^2+b^2) \end{pmatrix}$$

(c) 重心は中心

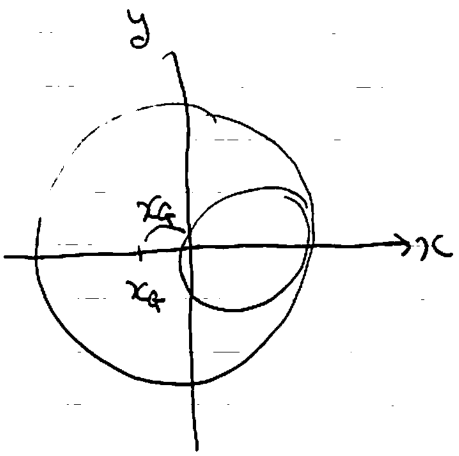
$$\begin{pmatrix} \frac{M}{5}(b^2+c^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M}{5}(c^2+a^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M}{5}(a^2+b^2) \end{pmatrix}$$

(d) 重心は中心

$$\begin{pmatrix} \frac{M}{4}a^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M}{4}a^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M}{2}a^2 \end{pmatrix}$$

(e) 半径aの円から 半径$\frac{a}{2}$の円をくり抜く。

質量 $M = \rho\pi a^2 - \rho\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}\rho\pi a^2$



重心がx軸上になるように選ぶと

x_Gは

$$\rho\pi a^2 \cdot x_G = \rho\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2\left(x_G + \frac{a}{2}\right)$$

$$x_G = \frac{a}{6}.$$

$$I_{xx} = \frac{\rho\pi a^2}{4}a^2 - \frac{\rho\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2}{4}\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\rho\pi a^2}{4}a^2\left(1 - \frac{1}{16}\right) = \frac{3}{4}\rho\pi a^2 \frac{a^2}{3}\frac{15}{16}$$

$$= \frac{5}{16}Ma^2$$

$$I_{yy} = \left[\frac{\rho\pi a^2}{4}\cdot a^2 + \rho\pi a^2\left(\frac{a}{6}\right)^2\right] - \left[\frac{\rho\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2}{4}\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \rho\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2\left(\frac{4a}{6}\right)^2\right]$$

$$= \frac{\rho\pi a^2}{4}\cdot a^2\left[1 + \frac{4}{36} - \frac{1}{16} - \frac{4}{9}\right] = \frac{3}{4}\rho\pi a^2\cdot\frac{a^2}{3}\,\frac{144+16-9-64}{144} = Ma^2\frac{29}{144}$$

$$I_{zz} = \left[\frac{\rho\pi a^2}{2}a^2 + \rho\pi a^2\left(\frac{a}{6}\right)^2\right] - \left[\frac{\rho\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \rho\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2\left(\frac{2a}{3}\right)^2\right]$$

$$= \frac{\rho\pi a^2}{2}a^2\left[1 + \frac{2}{36} - \frac{1}{16} - \frac{2}{9}\right] = \frac{3}{4}\rho\pi a^2\cdot a^2\frac{2}{3}\,\frac{144+8-9-32}{144} = Ma^2\frac{2}{3}\,\frac{111}{144}$$

$$= \frac{37}{72}Ma^2$$

$$I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0$$

No.

問3

(a) 環部の慣性主軸は 軸3 および それに垂直な面内に2つ.

棒部の慣性主軸は 軸1 と それに垂直な2つ.

というわけで. 軸1と軸3はきまり!

これら2つに垂直になるように 軸2をとればよい。

環部・棒部の両方の主軸になっているので

慣性モーメントテンソルの非対角成分は 0。

(b) 円環中心からのキョリ x_G に重心があるとする

$$m_a x_G = m_l \left(\frac{l}{2} + a - x_G\right)$$

$$x_G = \frac{m_l}{M}\left(\frac{l}{2} + a\right)$$

(c) $$I_0^3 = \rho 2\pi a \cdot a^2 = m_a a^2$$

$$I_0^1 = I_0^2 \ , \quad I_0^1 + I_0^2 = I_0^3 \Rightarrow I_0^1 = I_0^2 = \frac{m_a}{2} a^2$$

(d) $$I_1^1 = 0 \ , \quad I_1^2 = I_1^3 = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \rho x^2 dx = \frac{\rho l^3}{12} = \frac{m_l}{12} l^2$$

(e) $$I^1 = I_0^1 + I_1^1 = \frac{m_a}{2} a^2$$

$$I^2 = I_0^2 + m_a x_G^2 + I_1^2 + m_l\left(a + \frac{l}{2} - x_G\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} m_a a^2 + \frac{1}{12} m_l l^2 + \frac{m_a m_l}{M}\left(a + \frac{l}{2}\right)^2$$

No.

$$I^3 = I_0^3 + m_a x_G^2 + I_1^3 + m_\ell \left(a + \frac{\ell}{2} - x_G\right)^2$$

$$= m_a a^2 + \frac{1}{12} m_\ell \ell^2 + \frac{m_a m_\ell}{M} \left(a + \frac{\ell}{2}\right)^2$$

(f) $= I^1 + I^2$

(g) $I^1 = \frac{0.15\,kg}{2} (0.13m)^2 = 1.3 \times 10^{-3}\ kg \cdot m^2$

$$I^2 = \frac{0.15\,kg}{2} (0.13m)^2 + \frac{0.18}{12} (0.38m)^2$$

$$+ \frac{0.15m \cdot 0.18m}{0.15m + 0.18m} \left(0.13m + \frac{0.38m}{2}\right)^2$$

$$= 1.2 \times 10^{-2}\ kg\,m^2$$

$$I^3 = 1.3 \times 10^{-2}\ kg\,m^2$$

$$I^1 \ll I^2 < I^3$$

課題5-4

(問4)

(a) $I_1\dot{\omega}_1+(I_3-I_2)\omega_3\omega_2=0$

$I_2\dot{\omega}_2+(I_1-I_3)\omega_1\omega_3=0$

$I_3\dot{\omega}_3+(I_2-I_1)\omega_2\omega_1=0$

(b) $I_3=I_1+I_2$ なので

$\dot{\omega}_1+\omega_3\omega_2=0$

$\dot{\omega}_2-\omega_1\omega_3=0$

$\dot{\omega}_3+\frac{I_2-I_1}{I_2+I_1}=0$

I_1がI_2にくらべて小さいときは

$\dot{\omega}_3+\omega_2\omega_1=0$

(c) $\omega_3\omega_2\approx0$ 初期条件

$\omega_1=\mathrm{const}$

(d) $\begin{pmatrix}\dot{\omega}_2\\\dot{\omega}_3\end{pmatrix}=\omega_1\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_2\\\omega_3\end{pmatrix}$

$\Rightarrow\begin{cases}\omega_2=A\sin(\omega_1t+\alpha)\\\omega_3=A\cos(\omega_1t+\alpha)\end{cases}$

(e) 初期条件が $\omega_2\omega_3\approx0$ なので $A\approx0$

$|\omega_2|=|\omega_3|\leq a\sim0<|\omega_1|$

No.

(f) ぶれが小さいから

$\omega_1 \omega_3 \approx 0$ ：初期条件

$\omega_2 = \mathrm{const}$ となり オイラー方程式の残り2つは

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_3 \end{pmatrix} = \omega_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

ω_1とω_3は 発散する項を含むので

ラケットは ぶれが大きくなる。

(g) 軸1回転と同様.

初期条件として $\omega_1 \omega_2 \approx 0$

$\rightarrow \quad \omega_3 = \mathrm{const}$

残り2つの オイラー方程式は

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \end{pmatrix} = \omega_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$$

ω_1とω_2は 振動解になり.

初期条件の振幅のままなので

ぶれは小さいまま 安定に回転する。