

課題 6 の解説

問 1 : きのか型の慣性モーメントテンソル

当初は、最下部の点 X を時間的に振動させた場合の運動を求める問題でした。講義の時間的制約から慣性モーメントテンソルを計算するだけにしました。

- (a) 笠の部分は円錐なので、質量は $\rho\pi(3a)^2h/3$ 、笠の部分は円柱なので $\rho\pi a^2(2h)$ 。合計で $M = 5\rho\pi a^2h$ になる。
- (b) 物体は z 軸対象であるから、重心は z 軸上にある。重心位置を X から z_G 離れた点とおくと、つりあいの式

$$3\rho\pi a^2h \cdot \left(\frac{9}{4}h - z_G\right) + 2\rho\pi a^2h \cdot (h - z_G) = 0$$

が条件となり、

$$z_G = \frac{7}{4}h$$

重心は、 X から $7/4 h$ の軸上にある。

- (c) 慣性モーメントテンソルの計算も、笠と笠に分けておこなう。

－ 軸 3 まわり

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^{2h} dz \frac{\rho\pi a^2}{2} a^2 + \int_{2h}^{3h} dz \frac{\rho\pi}{2} \left(-\frac{3a}{h}(z - 3h)\right)^2 \\ &= \rho\pi a^4 h \left(1 + \frac{81}{10}\right) \\ &= \frac{91}{50} M a^2 \end{aligned}$$

– 軸 1 まわり

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_0^{2h} dz \int_0^a dr \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \, \rho r (z^2 + r^2 \cos^2 \theta) \\
&\quad + \int_{2h}^{3h} dz \int_0^{-\frac{3a}{h}(z-3h)} dr \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \, \rho r (z^2 + r^2 \cos^2 \theta) \\
&= \int_0^{2h} dz \int_0^a dr \, \pi \rho (2rz^2 + r^3) \\
&\quad + \int_{2h}^{3h} dz \int_0^{-\frac{3a}{h}(z-3h)} dr \, \pi \rho (2rz^2 + r^3) \\
&= \int_0^{2h} dz \, \pi \rho (a^2 z^2 + \frac{a^4}{4}) \\
&\quad + \int_{2h}^{3h} dz \, \pi \rho \left[2z^2 \frac{(\frac{3a}{h})^2 (z-3h)^2}{2} + \frac{(\frac{3a}{h})^4 (z-3h)^4}{4} \right] \\
&= 5\pi \rho a^2 h \left(\frac{8}{15} h^2 + \frac{1}{10} a^2 \right) + 5\pi \rho a^2 h \left(\frac{3^2 \cdot 17}{50} h^2 + \frac{3^4}{100} a^2 \right) \\
&= \frac{91}{100} M a^2 + \frac{539}{150} M h^2
\end{aligned}$$