課題 7 の解説

問 1

(a) 運動エネルギーは

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\theta^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2)$$

と書けるので、ラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\theta^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2) - U(r, \theta, \phi)$$

(b)

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \\ p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \\ p_\phi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\sin^2\theta\dot{\phi} \end{aligned}$$

(c) (b) の結果から

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2}, \quad \dot{\phi} = \frac{p_\theta}{mr^2\sin^2\theta}$$

となるので、

$$T = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2\sin^2\theta}\right)$$

と表される。

(d) ϕ が循環座標で、p_ϕ が一定になる。

(e)

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2\theta}\right) + U(r,\theta,\phi)$$

(f)

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \\
\dot{p}_r &= -\frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{\partial U}{\partial r} \\
\dot{\theta} &= \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \\
\dot{p}_\theta &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{p_\phi^2 \cos\theta}{mr^2 \sin^3\theta} \\
\dot{\phi} &= \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2 \sin^2\theta} \\
\dot{p}_\phi &= -\frac{\partial H}{\partial \phi} = 0
\end{aligned}$$

(g) （省略）

問2

(a)

$$U = -\frac{Gm_1m_2}{r}$$

(b)

$$K = \frac{1}{2}m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2^2$$

(c)

$$\boldsymbol{R} = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2}$$

となるので、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_1 &= \boldsymbol{R} - \frac{\mu}{m_1}{'}bmr \\ \boldsymbol{r}_2 &= \boldsymbol{R} + \frac{\mu}{m_2}{'}bmr \end{aligned}$$

と表される。ラグランジアンは

$$\begin{aligned} L &= K - U \\ &= \frac{1}{2}m_1(\dot{\boldsymbol{R}} - \frac{\mu}{m_1}\dot{\boldsymbol{r}}_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{\boldsymbol{R}} + \frac{\mu}{m_2}\dot{\boldsymbol{r}}_1)^2 + \frac{Gm_1m_2}{r} \\ &= \frac{1}{2}M\dot{\boldsymbol{R}}^2 + \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 + \frac{Gm_1m_2}{r} \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \mu\dot{r} \\ p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \mu r^2\dot{\theta} \\ p_\phi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \mu r^2 \sin^2\theta\dot{\phi} \end{aligned}$$

(e)

$$H = \frac{\boldsymbol{P}^2}{2M} + \frac{\boldsymbol{p}^2}{2\mu} - \frac{Gm_1m_2}{r}$$

(f) 重心から相対運動のみを考えるので、ハミルトニアンは

$$H_{rel} = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2\mu} - \frac{Gm_1m_2}{r}$$

となる。

$\boldsymbol{A}$ を成分表示してみる。第 1 項の x 成分について計算すると

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L})_x &= p_yL_z - p_zL_y \\ &= p_y(xp_y - yp_x) - p_z(zp_x - xp_z)\end{aligned}$$

となるから、$\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{p}$ に関する微係数は、

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L})_x}{\partial x} &= p_y^2 + p_z^2 \ , \\ \frac{\partial(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L})_x}{\partial y} &= -p_xp_y \ , \\ \frac{\partial(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L})_x}{\partial z} &= -p_xp_z \ , \\ \frac{\partial(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L})_x}{\partial p_x} &= -yp_y - zp_z \ , \\ \frac{\partial(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L})_x}{\partial p_y} &= 2xp_y - yp_x \ , \\ \frac{\partial(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L})_x}{\partial p_y} &= 2xp_z - zp_x\end{aligned}$$

になる。したがって、

$$\begin{aligned}
\{(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L})_x, H\} &= (p_y^2+p_z^2)\cdot\frac{p_x}{\mu}+(yp_y+zp_z)\cdot\frac{GM\mu}{r^3}x \\
&\quad -p_xp_y\cdot\frac{p_y}{\mu}-(2xp_y-yp_x)\cdot\frac{GM\mu}{r^3}y \\
&\quad -p_xp_z\cdot\frac{p_z}{\mu}-(2xp_z-zp_x)\cdot\frac{GM\mu}{r^3}z \\
&= \{(y^2+z^2)p_x-x(yp_y+zp_z)\}\frac{GM\mu}{r^3}
\end{aligned}$$

となる。一方、第 2 項は、

$$\begin{aligned}
\{\frac{x}{r}, H\} &= \{x,H\}\cdot\frac{1}{r}+x\cdot\{\frac{1}{r},H\} \\
&= \frac{p_x}{\mu}\cdot\frac{1}{r}+x\left(-\frac{x}{r^3}\cdot\frac{p_x}{\mu}-\frac{y}{r^3}\cdot\frac{p_y}{\mu}-\frac{z}{r^3}\cdot\frac{p_z}{\mu}\right) \\
&= \frac{p_x}{\mu}\left(\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3}\right)-\frac{1}{\mu}x(yp_y+zp_z)\frac{1}{r^3} \\
&= \frac{p_x}{\mu}\left(\frac{y^2+z^2}{r^3}\right)-\frac{x}{\mu}(yp_y+zp_z)\frac{1}{r^3}
\end{aligned}$$

と計算される。以上より、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{GM\mu^2}\{(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L})_x, H\}-\{\frac{x}{r},H\} &= 0 \\
\{\frac{1}{GM\mu^2}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L})_x-\frac{x}{r},H\} &= 0
\end{aligned}$$

y, z 成分についても、同様にゼロになる。

(g) $\boldsymbol{A}$ は時間変化しない。（保存量）

(h) $\boldsymbol{A}$ の 3 成分、$\boldsymbol{L}$ の 3 成分、エネルギーで、合計 7 つ。

(i) 相対運動の自由度は 3 で、位相空間は (x, y, z, p_x, p_y, p_z) の 6 次元で表される。保存量が 7 つだと、保存量の方が多いことになる。7 つのうちのいくつかが独立ではないと予想される。

$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{L} = 0$ になるから、保存量は１つ減って６になる。６つだと、位相空間上の１点にとどまることになる。惑星は楕円軌道を描く。楕円軌道上の位置は１つの変数で表すことができるから、もう１つ減るはずである。

問3

(a)

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial W_1}{\partial q_i} = Q_i \\ P_i &= -\frac{\partial W_1}{\partial Q_i} = -q_i \end{aligned}$$

なので、

$$\begin{aligned} Q_i &= p_i \\ P_i &= -q_i \end{aligned}$$

新しいハミルトニアンは、

$$K(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}) = \frac{\boldsymbol{Q}^2}{2m} + V(-\boldsymbol{P})$$

(b)

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial W_3}{\partial q_i} = P_i + \frac{\partial f}{\partial q_i} \\ Q_i &= \frac{\partial W_3}{\partial P_i} = q_i \end{aligned}$$

なので、

$$\begin{aligned} Q_i &= q_i \\ P_i &= p_i - \frac{\partial f}{\partial q_i} \end{aligned}$$

新しいハミルトニアンは、

$$K(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}) = \frac{(\boldsymbol{P} - \boldsymbol{\nabla} f)^2}{2m} + V(\boldsymbol{Q}) + \frac{\partial f}{\partial t}$$

(c)

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial W_3}{\partial q_i} = P_i + m v_i \\ Q_i &= \frac{\partial W_3}{\partial P_i} = q_i - v_i t + a_i \end{aligned}$$

なので、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Q} &= \boldsymbol{q} - \boldsymbol{v} t + \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{P} &= \boldsymbol{p} - m\boldsymbol{v} \end{aligned}$$

新しいハミルトニアンは、

$$\begin{aligned} K(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{P}) &= \frac{(\boldsymbol{P} - m\boldsymbol{v})^2}{2m} + V(\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{v}t - \boldsymbol{a}) - \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{P} - \frac{m\boldsymbol{v}^2}{2} \\ &= \frac{\boldsymbol{P}^2}{2m} + V(\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{v}t - \boldsymbol{a}) \end{aligned}$$

問4

点変換

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\phi \\ y &= r \sin\theta \sin\phi \\ z &= r \cos\theta \end{aligned}$$

が

$$q_i = -\frac{\partial W_2}{\partial p_i}$$

に一致するように母関数を決めればよいので、

$$W_2 = r \sin\theta \cos\phi \; p_x + r \sin\theta \sin\phi \; p_y + r \cos\theta \; p_z$$

問5

(a)

$$
\begin{aligned}
x' &= \frac{\partial \Psi}{\partial p'_x} = x\cos\omega t + y\sin\omega t \\
y' &= \frac{\partial \Psi}{\partial p'_y} = -x\sin\omega t + y\cos\omega t \\
z' &= \frac{\partial \Psi}{\partial p'_z} = z
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_x &= \frac{\partial \Psi}{\partial x} = p'_x\cos\omega t - p'_y\sin\omega t \\
p_y &= \frac{\partial \Psi}{\partial y} = p'_x\sin\omega t + p'_y\cos\omega t \\
p_z &= \frac{\partial \Psi}{\partial z} = p'_z
\end{aligned}
$$

なので、

$$
\begin{aligned}
p'_x &= p_x\cos\omega t + p_y\sin\omega t \\
p'_y &= -p_x\sin\omega t + p_y\cos\omega t \\
p'_z &= p'_z
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2m}\left\{(p'_x\cos\omega t - p'_y\sin\omega t)^2 + (p'_x\sin\omega t + p'_y\cos\omega t)^2 + {p'_z}^2\right\} \\
&\quad + U(x'\cos\omega t - y'\sin\omega t, x'\sin\omega t + y'\cos\omega t, z') \\
&\quad + \omega[p'_x(-x\sin\omega t + y\cos\omega t) + p'_y(-x\cos\omega t - y\sin\omega t)] \\
&= \frac{{p'_x}^2 + {p'_y}^2 + {p'_z}^2}{2m} + U(x'\cos\omega t - y'\sin\omega t, x'\sin\omega t + y'\cos\omega t, z') \\
&\quad + \omega(p'_x y' - p'_y x')
\end{aligned}
$$

(c) z 軸のまわりに角速度 ω で回転する座標

(d)

$$
\begin{aligned}
\dot{x}' &= \frac{\partial K}{\partial p'_x} = \frac{p'_x}{m} + \omega y' \\
\dot{y}' &= \frac{\partial K}{\partial p'_y} = \frac{p'_y}{m} - \omega x' \\
\dot{z}' &= \frac{\partial K}{\partial p'_z} = \frac{p'_z}{m}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{p}'_x &= -\frac{\partial K}{\partial x'} = \omega p'_y - \frac{\partial U}{\partial x'} \\
\dot{p}'_y &= -\frac{\partial K}{\partial y'} = -\omega p'_x - \frac{\partial U}{\partial y'} \\
\dot{p}'_z &= -\frac{\partial K}{\partial z'} = -\frac{\partial U}{\partial z'}
\end{aligned}
$$

(e) x' 成分について

$$
\begin{aligned}
\ddot{x}' &= \frac{\dot{p}'_x}{m} + \omega \dot{y}' \\
&= \frac{1}{m}\left(\omega p'_y - \frac{\partial U}{\partial x'}\right) + \omega\left(\frac{p'_y}{m} - \omega x'\right) \\
m\ddot{x}' &= \omega p'_y - \frac{\partial U}{\partial x'} + \omega p'_y - m\omega^2 x' \\
&= -\frac{\partial U}{\partial x'} + 2\omega p'_y - m\omega^2 x'
\end{aligned}
$$

２項目はコリオリ力、３項目は遠心力。y' 成分についても同様に書け、

$$
m\ddot{y}' = -\frac{\partial U}{\partial y'} + 2\omega p'_x - m\omega^2 y'
$$

z' 成分は、z と同じなので変化なし。

$$
m\ddot{z}' = -\frac{\partial U}{\partial z'}
$$